

Protokoll zu

Versuch E-101 Balmer-Serie

Fortgeschrittenen-Praktikum Teil I
Wintersemester 2002/2003

Von
Jan Stillings, Kathrin Valerius

Semesterzahl: 7
Hauptfach: Physik
Gruppe α 2

Assistent: Jochen Janssen
Datum: 29.07.02

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	3
1.1	Theorie der Elektronenhülle - das Wasserstoffatom	3
1.1.1	Bohrsches Atommodell und Rydberg-Konstante	3
1.1.2	Quantenmechanische Beschreibung des Wasserstoff-Atoms	4
1.1.3	„Vollständige“ Beschreibung des Wasserstoffspektrums	4
1.1.4	Auswahlregeln	6
1.1.5	Linienbreite	6
1.2	Spektroskopie	8
1.2.1	Geräte und Arbeitsmaterial	8
1.2.2	Auflösungsvermögen des Prismenspektrographen	8
1.3	Das Hartmann-Verfahren	9
2	Versuchsaufbau und Durchführung	11
2.1	Der Prismenspektralapparat	11
2.2	Justierung des Apparates	11
2.3	Aufnahme der Spektren	12
2.4	Entwickeln des Films	12
3	Auswertung der Daten	13
3.1	Ausmessen der Spektrallinien	13
3.2	Zuordnung der Referenzlinien von Hg und Cd	13
3.3	Umrechnung in Vakuumwellenlängen	14
3.4	Bestimmung der Wasserstofflinien	15
3.4.1	Graphische Auswertung	15
3.4.2	Numerische Auswertung	17
3.4.3	Diskussion der Verfahren	18
3.5	Bestimmung der Rydberg-Konstante	19
3.6	Auflösungsvermögen der Apparatur	19
4	Schlussbemerkungen und Referenzen	21
4.1	Diskussion der Ergebnisse	21
4.2	Literatur	21
5	Anhang	22

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Theorie der Elektronenhülle - das Wasserstoffatom

1.1.1 Bohrsches Atommodell und Rydberg-Konstante

Da es sich beim Wasserstoffatom um eines der einfachsten quantenmechanischen Systeme handelt, ist es besonders gut geeignet, theoretische Überlegungen experimentell zu überprüfen. In diesem Versuch beschäftigen wir uns mit der Theorie der Lichtemission durch Atome, speziell durch das Wasserstoffatom. Aus Beobachtungen ist schon seit langer Zeit bekannt, dass Atome nur bei ganz bestimmten Energien bzw. Frequenzen Licht ausstrahlen, was zu „scharfen“ Linien im Spektrum führt. Niels Bohr lieferte mit seinem Atommodell einen ersten Erklärungsansatz. Er forderte dazu, dass

- sich im Atom die negativ geladenen Elektronen nach den Gesetzen der klassischen Mechanik auf kreisförmigen Bahnen *strahlungsfrei* um einen positiv geladenen Kern bewegen sollten,
- dies nur auf speziellen Bahnen erfolgen könne, welche durch einen gequantelten Bahndrehimpuls $L = n \cdot \hbar$ sowie eine diskrete Energie E_n bestimmt seien, und dass
- Emission von Strahlung nur beim Übergang eines Elektrons von einem höheren zu einem niedrigeren „Orbit“ erfolge, gemäß der Formel $\nu = \frac{\Delta E}{h}$ (wobei ΔE den Energieunterschied zwischen den betreffenden Bahnen bezeichnet).

Die Bohrschen Bahnradien sowie die Energieniveaus lassen sich unter der Annahme berechnen, dass die Zentrifugalkraft der Kreisbewegung die Coulomb-Anziehungskraft des Kerns gerade aufhebt, so dass sich stabile Bahnen für die Elektronen ergeben. Auf eine Rechnung soll hier verzichtet werden. Man erhält unter Ausnutzung von $L = m_e \cdot v \cdot r_n = n \cdot \hbar$ die Relationen

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Ze^2m_e} \cdot n^2, \quad (1)$$

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Z^2e^4m_e}{(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (2)$$

Führt man die Abkürzungen

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m_e} \quad \text{und} \quad R_\infty = \frac{1}{2} \frac{Z^2e^4m_e}{(4\pi\epsilon_0\hbar)^2hc} = \frac{Z^2e^4m_e}{8\epsilon_0h^3c}$$

ein, so bekommt man die etwas handlicheren Formeln

$$r_n = \frac{a_0}{Z} \cdot n^2, \quad (3)$$

$$E_n = -hc \cdot R_\infty \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (4)$$

Dabei heißt $a_0 = 0,529 \text{ \AA}$ Bohrscher Radius und $R_\infty = 1,097 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$ (für $Z = 1$) Rydberg-Konstante.

Die Energiedifferenz zwischen einem höheren Niveau n und einem tieferen Niveau m ist dann gegeben durch

$$\Delta E = E_n - E_m = -hc \cdot R_\infty \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (5)$$

Mit $c = \lambda\nu$ und $\nu = \Delta E/h$, findet man schließlich folgenden Ausdruck für die Wellenzahl des bei dem Übergang ausgestrahlten Licht:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Entsprechend den Endniveaus sind die Übergänge in Serien zugeordnet:

$m = 1$	Lyman-Serie
$m = 2$	Balmer-Serie
$m = 3$	Paschen-Serie
$m = 4$	Brackett-Serie
$m = 5$	Pfund-Serie

Aus Unterschieden zwischen dem gemessenen und dem theoretischen Wert der Rydberg-Konstanten weiß man, dass es nicht genügt, den Atomkern als unendlich schwer und unbeweglich anzunehmen (wie das in der bisherigen Betrachtung geschehen ist). Statt dessen ist es erforderlich, die Mitbewegung des Kerns beim Umlauf des Elektrons mit einzubeziehen. Um das einfache Einkörperproblem beibehalten zu können führt man die reduzierte Masse des Systems aus Kern und Elektron ein,

$$\mu = \frac{m_e m_K}{m_e + m_K}.$$

Die Masse des Elektrons wird dann in den obigen Formeln durch μ ersetzt, so dass sich für die Rydberg-Konstante folgende Änderung ergibt:

$$R_H = \frac{\mu}{m_e} \cdot R_\infty = R_\infty \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_K}}.$$

1.1.2 Quantenmechanische Beschreibung des Wasserstoff-Atoms

In Schrödingers wellenmechanischem Ansatz ist zur Bestimmung der Energieniveaus die stationäre Schrödingergleichung

$$H\psi_n = E_n\psi_n$$

mit dem Hamiltonoperator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r}$$

zu lösen. Aufgrund der Radialsymmetrie bietet sich die Verwendung von Kugelkoordinaten an. Dadurch erhält der Laplace-Operator einen zum Quadrat des Drehimpulsoperators proportionalen Anteil, und man kann einen Satz gemeinsamer Eigenfunktionen von H und \vec{L}^2 finden - die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$. Als geeigneter Lösungsansatz erweist sich damit eine Wellenfunktion der Form

$$\psi = \frac{u_{nl}}{r} Y_l^m,$$

wobei in u_{nl} im wesentlichen die Laguerre-Polynome enthalten sind.

Wie beim Bohrschen Modell sind auch hier die Energieeigenwerte nur von der Hauptquantenzahl n abhängig und liegen größenordnungsmäßig im eV-Bereich.

Zu beachten ist die n^2 -fache Entartung, die durch die im Separationsansatz mit Radialteil und Winkelanteil eingeführten Quantenzahlen l und m zustande kommt: Da l von 0 bis $n-1$ läuft und m von $-l$ bis $+l$, hat man zu jedem Energieeigenwert E_n genau

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

Zustände.

An diesen Energiewerten sind jedoch noch einige Korrekturen anzubringen; sie werden im nächsten Abschnitt kurz behandelt.

1.1.3 „Vollständige“ Beschreibung des Wasserstoffspektrums

- **Spin-Bahn-Wechselwirkung**

Da das Elektron außer seinem Bahndrehimpuls \vec{L} noch als inneren Freiheitsgrad den Eigendrehimpuls oder Spin \vec{S} besitzt, kommt durch die Wechselwirkung der beiden magnetischen Momente μ_l und μ_s eine Aufspaltung eines Energieniveaus in zwei Terme mit leicht unterschiedlichen Energien zustande. Dabei wird der eine Term nach oben und der andere nach unten verschoben. Der Grund hierfür ist, dass sich μ_l und μ_s entweder parallel oder antiparallel zueinander ausrichten können. Dies resultiert in einer Dublettstruktur der betreffenden Spektrallinien. Führt man einen Gesamtdrehimpuls \vec{J} ein, so berechnet sich die Energieaufspaltung zwischen den beiden Termen zu

$$E_{l,s} = \xi(r) \cdot (\vec{L} \cdot \vec{S}) = \xi(r) \cdot \frac{\hbar}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)].$$

Für das Wasserstoffatom hat der erste Faktor die Form $\xi(r) = \frac{chR_H Z^4 \alpha^2}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)}$.

- **Relativistische Korrektur**

Dirac hat eine Theorie zur Beschreibung relativistischer Elektronen aufgestellt. Betrachtet man jedoch kleine Impulse, so genügt es, die Schrödingergleichung zu modifizieren. (Diese Formulierung ist allerdings nicht kovariant.) Man ersetzt im Hamiltonoperator den kinetischen Term $\frac{p^2}{2m}$ durch die relativistische Energie-Impuls-Beziehung abzüglich der Ruheenergie und erhält so:

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 + V = mc^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4}} - mc^2 + V.$$

Durch Entwicklung der Wurzel bis zur zweiten Ordnung findet man

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + V,$$

so dass sich folgender zusätzlicher Energieterm ergibt:

$$E_{rel} = \frac{E_n \alpha^2 Z^4}{n} \left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right).$$

Offenbar tragen sowohl die Spin-Bahn-Wechselwirkung als auch die relativistische Korrektur beide einen Term in der Größenordnung $\alpha^2 Z^4$ bei, so dass sie addiert werden können:

$$E_{n,l,j} = -\frac{R_H ch Z^2}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right].$$

Der gemeinsame Faktor $\alpha^2 Z^4$ deutet darauf hin, dass relativistische Korrektur und Spin-Bahn-Kopplung einen gemeinsamen Ursprung haben. (Siehe Dirac-Theorie!)¹ Die Aufspaltung der Linie durch diese beiden Feinstruktureffekte liegt im Bereich von ca. 10^{-4} eV.

- **Hyperfeinstruktur**

Ähnlich wie bei der Berücksichtigung des Elektronenspins kann man auch bei der Betrachtung des Einflusses des Kernspins verfahren. Weist man dem Atomkern den Eigendrehimpuls \vec{I} zu, so kann man daraus $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$ bilden, d.h. \vec{I} und \vec{J} koppeln zu einem neuen Gesamtdrehimpuls. Anders gesagt, das magnetische Moment des Kerns wechselwirkt mit dem magnetischen Feld, das am Ort des Atomkerns vom Gesamtdrehimpuls des Hüllenelektrons erzeugt wird.

Wiederum findet sich eine Energieverschiebung der Niveaus gemäß

$$E_{HFS} = \frac{a_{HFS}}{2} [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)],$$

wobei a_{HFS} die von j abhängige Intervallkonstante der Hyperfeinstruktur bezeichnet.

Die Korrektur liegt hier aber wegen des Massenunterschieds zwischen Elektron und Proton ca. 3 Größenordnungen unterhalb der Feinstrukturkorrektur.

- **Lamb-Verschiebung und QED-Effekte**

Nach der Dirac-Theorie sollten die Niveaus $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ entartet sein, da sie die gleiche Quantenzahlen n und j besitzen. Tatsächlich beobachtet man jedoch eine sehr kleine Verschiebung. Dies wird dadurch erklärt, dass das $2s_{1/2}$ -Niveau gegenüber dem $2p_{1/2}$ -Niveau um ca. 10^{-6} eV angehoben ist (sogenannte Lamb-shift). Ursache hierfür sind QED-Effekte: durch Vakuumpolarisation wird das elektromagnetische

¹Kuhn, Seite 121

Feld des Kerns leicht abgeschirmt, was zu einer Verschiebung der Energieniveaus führt. Das Elektron scheint ständig Photonen zu emittieren und zu absorbieren (Selbstwechselwirkung des Elektrons), was für sehr kurze Zeiten durch die Unschärferelation in Umgehung des Energiesatzes ermöglicht wird. In der Theorie der Quantenelektrodynamik kommt dies durch Berücksichtigung höherer Terme zum Ausdruck.

Ebenso ergibt sich aus dieser Theorie, dass der von Dirac als exakt 2 vorausgesagte Landé-Faktor eher

$$g = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328\frac{\alpha^2}{\pi^2} + \dots\right) = 2,002319$$

beträgt.

1.1.4 Auswahlregeln

Zur Erklärung der Tatsache, dass nur ganz bestimmte Übergänge beobachtet werden und andere nicht, ist es notwendig, auf einige Auswahlregeln zurückzugreifen. Diese ergeben sich aus Symmetrieeigenschaften des betrachteten Problems (sei es nun das Wasserstoffatom mit einem Elektron oder ein Mehrelektronensystem).

Atome „koppeln“ an äußere Felder, zum Beispiel das Lichtfeld. Dabei werden Übergänge zwischen Elektronenzuständen hervorgerufen. Sie treten aber nur dann auf (wenigstens in erster Ordnung), wenn das Matrixelement des äußeren Feldes nicht verschwindet. Dass ein bestimmter Übergang „verboten“ ist, erkennt man daran, dass die entsprechende Spektrallinie gar nicht oder nur sehr schwach zu beobachten ist.

1. Bahndrehimpuls L : erlaubt sind nur Übergänge mit $\Delta L = \pm 1$
2. magn. Quantenzahl m_l : erlaubt sind nur Übergänge mit $\Delta m_l = 0, \pm 1$, wobei ersteres für linear (bzw. parallel zur Dipolachse z) polarisiertes Licht gilt und letzteres für rechts bzw. links polarisiertes Licht.
3. Die Multiplizität $2S + 1$ darf sich während des Prozesses nicht ändern
4. Gesamtdrehimpuls J : erlaubt sind nur Übergänge mit $\Delta J = 0, \pm 1$, solche von $J = 0$ zu $J = 0$ sind aber verboten.

Der Übergang von $2s$ nach $1s$ (Grundzustand) ist zum Beispiel nicht erlaubt, das entsprechende Niveau wird also durch Stöße entleert.

Betrachtet man elektrische Dipolstrahlung, so ist das Matrixelement des elektrischen Dipoloperators $e \cdot z$ zwischen Anfangs- und Endzustand zu bilden.²

1.1.5 Linienbreite

Hat man eine Apparatur mit genügend hoher Auflösung zur Verfügung, so stellt man fest, dass sich die Spektrallinien nicht beliebig scharf einstellen lassen, sondern dass immer eine „Restbreite“ übrig bleibt. Diese lässt sich durch Verminderung des Gasdruckes in der Spektrallampe oder durch Kühlung teilweise reduzieren, aber nicht vollständig umgehen. Die drei hauptsächlichen Ursachen, die dazu führen, dass Spektrallinien ein *Profil* besitzen, sind folgende:

1. Natürliche Linienbreite:

Stellt man sich das Atom modellhaft als harmonischen Oszillator vor³, so kann diesem eine feste Frequenz $\omega_k = E_k/\hbar$ zugeordnet werden. Wenn das Atom jedoch Strahlung aussendet, verliert es Energie und vollführt daher eine gedämpfte Schwingung. Man kann sagen, die Dämpfung verringert die Kreisgüte des atomaren Oszillators - daher verbreitert sich der Frequenzbereich, in dem er schwingt. Durch den exponentiellen Abfall der Einhüllenden, $e^{-\Gamma t/2\hbar}$, wird eine Zeitkonstante τ definiert, die der endlichen Lebensdauer eines angeregten Zustandes entspricht und mit der Halbwertsbreite Γ der Resonanzkurve zusammenhängt über $\Gamma \cdot \tau = \hbar$. Für das Linienprofil ergibt sich die Breit-Wigner-Form

$$I(\omega) = I_0(\omega_k) \cdot \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_k)^2 + (\Gamma/2)^2}.$$

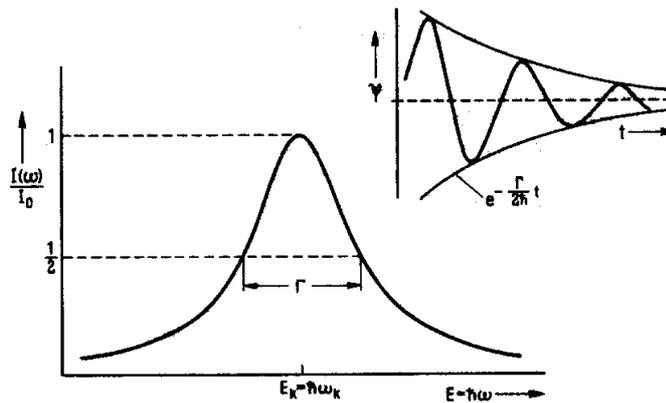


Abbildung 1: Lorentz-Kurve

Die natürliche Linienbreite liefert ein Lorentzprofil. Der Effekt macht ca. 0,1 bis 100 MHz aus.

Allgemein ergibt sich aufgrund der Tatsache, dass Zeit und Energie (bzw. Frequenz) zusammengehörige Fourierdomänen sind, immer dann eine Verbreiterung im Frequenzbereich, wenn die Lebensdauer des angeregten Zustandes nicht unendlich ist, also durch irgendwelche Mechanismen (z.B. spontane Emission, Stöße) verkürzt wird.

2. Dopplerverbreiterung:

Die thermische Bewegung der Atome in der Lichtquelle führt zu einer Dopplerverschiebung der Linien. Die beobachtete Linienfrequenz hängt also von der Ausrichtung der thermischen Bewegung zur Strahlungsrichtung ab (parallel, orthogonal, ...). Ist ν_0 die Frequenz des in x-Richtung ausgestrahlten Lichtes und v_x die Geschwindigkeitskomponente des betreffenden Atoms in Richtung der Emission, so bewirkt der Dopplereffekt, dass ein Beobachter die Frequenz

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v_x}{c}}{1 - \frac{v_x}{c}}}$$

Da die Geschwindigkeiten v_x der Atome in der Lichtquelle maxwell-verteilt sind, findet man eine Intensitätsverteilung

$$I(\nu) = I(\nu_0) \cdot e^{-\frac{M c^2}{2RT} \frac{(\nu_0 - \nu)^2}{\nu_0^2}},$$

wobei M das Molekulargewicht, R die Gaskonstante und T die Temperatur bezeichnen. Es ergibt sich also ein Gauß-Profil.

Im sichtbaren Bereich bildet die Dopplerverbreiterung mit ca. 0,004 Å bis 0,4 Å den stärksten Beitrag zur Linienbreite.

Möchte man die Effekte der natürlichen Linienbreite und der Dopplerverbreiterung zusammenfassen, so faltet man die Lorentz-Kurve mit der Gauß-Kurve; das Ergebnis wird als Voigt-Profil bezeichnet.

3. Druckverbreiterung:

Durch Stöße zwischen den Gasmolekülen wird die mittlere Lebensdauer der angeregten Zustände weiter herabgesetzt, was wiederum zu einer Verbreiterung der entsprechenden Spektrallinien führt. Im klassischen Bild ausgedrückt bedeutet dies, dass der Oszillator keinen hinreichend langen Wellenzug emittieren kann, da die Emission durch den Stoß unterbrochen wird. Es ist klar, dass die Druck- oder Stoßverbreiterung erst dann eine merkliche Rolle spielt, wenn die Zeit zwischen den Stößen in der Größenordnung der mittleren Lebensdauer der angeregten Niveaus bzw. darunter liegt. Sie liefert einen Beitrag von ca. 100 MHz.

²siehe dazu z.B. Heckmann/Träbert, Kap. 1.3.4

³Mayer-Kuckuk, Kapitel 6.4

1.2 Spektroskopie

1.2.1 Geräte und Arbeitsmaterial

Bei diesem Versuch soll ein Teil des Wasserstoffspektrums aufgenommen und analysiert werden. Dazu benötigt man vor allem eine geeignete Lichtquelle, einen Mechanismus zur Aufspaltung des Lichtes in Spektrallinien und schließlich einen Film zur Aufnahme des Bildes, das später ausgemessen werden soll.

- **Gasentladungslampen**⁴

Bei unserem Versuch wird unter anderem eine Quecksilberdampfdrucklampe verwendet. Das Prinzip ist folgendes: Man nimmt eine bestimmte Menge eines Edelgases (z.B. Neon) und mischt diesem ein wenig Quecksilberdampf bei. Daran legt man eine hohe Spannung an, so dass die im Gas vorhandenen Streuelektronen auf hohe Energien beschleunigt werden und das Gas ionisieren. Bei der Rekombination werden die Atome des Edelgases angeregt und können ihre kinetische Energie auf unterschiedliche Art und Weise an die Hg-Atome abgeben, welche dann ihrerseits zum Leuchten angeregt werden. Je nach Füllung und Druck kann die spektrale Charakteristik solcher Lampen sehr unterschiedlich ausfallen (Niederdrucklampen: wenige ausgeprägte Linien; Mitteldrucklampen: größerer Linienreichtum; Hochdrucklampen: breite Emissionsbanden).

In der Wasserstofflampe befinden sich außer dem Gas noch eine Wolfram-Anode und eine heizbare Kathode, die durch ein Blendensystem miteinander verbunden sind. Die Emission kommt unter anderem durch die Rekombination $2H \rightarrow H_2$ zustande. Dies sind jedoch nicht die Linien, die uns interessieren - wir wollen schließlich das Spektrum des atomaren Wasserstoffs messen, und nicht die Moleküllinien. Die Atome werden durch Stöße angeregt, wobei sie eine beliebige Energiemenge aufnehmen, die jedoch aufgrund der Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge nicht beliebig wieder abgegeben werden kann. (Aus dem Bohrschen Atommodell folgt ja bereits, dass nur diejenigen Elektronen Strahlung abgeben können, die von einem höher gelegenen Niveau in ein tieferes zurückspringen, was einen Drehimpulsunterschied von ganzzahligen Vielfachen von \hbar bedeutet. Später soll noch ein wenig mehr über die Auswahlregeln gesagt werden.)

- Das bei diesem Versuch verwendete **Dispersionsprisma** hat eine ausgeleuchtete Basisbreite von 65 mm und besteht aus Quarz (ebenso wie die Linsen), damit nicht nur die wenigen im sichtbaren Teil des Spektrums liegenden Balmer-Linien, sondern auch der ultraviolette Teil beobachtet werden kann. Der Nachteil, den man dafür in Kauf nehmen muss, besteht in der schlechteren Abbildungsqualität von Quarzlinsen und -prisma. Zur Kompensation der chromatischen Aberration ist die Bildebene des Prismenspektrographen mit an drei Stellen mit Schrauben verstellbar.
- Zur Aufnahme der Spektren wird der im uv- und visuellen Bereich empfindliche schwarz-weiß-**Film** Kodak TRI-X pan 25 (9x12) eingesetzt, der eine Auflösung von bis zu 50-100 Linienpaaren pro mm erreichen kann (je nach Kontrastschärfe).
- Der **Komparator** wird zur Ausmessung der Spektrallinien benötigt. Er besteht aus einer von unten beleuchteten Glasplatte, über der ein Okular und eine Meßskala mit doppeltem Nonius angebracht sind. Das Foto muss auf der Glasplatte so befestigt werden, dass es beim Vermessen nicht verrutschen kann. Anschließend werden der Reihe nach von einem willkürlich gewählten Nullpunkt aus die Positionen der Spektrallinien auf dem Film abgelesen, wobei das Okular über dem Foto immer weiterschoben wird.

1.2.2 Auflösungsvermögen des Prismenspektrographen

d Basisbreite des Prismas

a Schenkellänge des Prismendreiecks an der Seite des auftreffenden Strahls

γ Basiswinkel

α, β Winkel des ein- bzw. ausfallenden Strahls zum Lot auf die Seite a

Das Bild eines noch so eng gewählten Spaltes kann aufgrund von Beugungseffekten nicht beliebig scharf werden. Denkt man sich die in Richtung des einfallenden Strahls projizierte Breite $b = a \cdot \cos\alpha$ als begrenzende Öffnung,

⁴Schmidt, S.73

so erzeugt diese ein Beugungsbild, welches vom Prisma aus gesehen den Winkel $\frac{\lambda}{b}$ aufspannt.

Dies ist der Winkel, um den zwei Linien der Wellenlängen λ und $\lambda + \delta\lambda$ mindestens divergieren müssen, damit sie noch unterscheidbar sind.

Wir nehmen an, dass der Strahl das Prisma symmetrisch (d.h. mit minimaler Ablenkung) durchläuft. In diesem Fall ist $\gamma = \beta_1 + \beta_2 = 2\beta$. Außerdem gilt natürlich das Snelliussche Brechungsgesetz,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n. \quad (6)$$

Hieraus folgt

$$\frac{dn}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma/2}. \quad (7)$$

Bei symmetrischem Durchgang beträgt der gesamte Ablenkwinkel ϕ gerade

$$\phi = 2\alpha - 2\beta, \quad (8)$$

und bei einer Wellenlängenänderung um $\delta\lambda$, entsprechend einer Änderung des Brechungsindex um $\delta n = \frac{dn}{d\lambda}\delta\lambda$, ändert sich der Ablenkwinkel um

$$\delta\phi = 2 \cdot \delta\alpha = 2 \frac{d\alpha}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda = 2 \frac{\sin\gamma/2}{\cos\alpha} \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda \quad (9)$$

(wegen (2)).

Aus unserer Forderung, dass zur Trennbarkeit zweier Linien

$$\frac{\lambda}{b} = \delta\phi \quad (10)$$

gelten muss, erhalten wir also

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a \cdot \cos\alpha} &= 2 \frac{\sin\gamma/2}{\cos\alpha} \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\delta\lambda} &= \frac{d}{2} \cdot 2 \frac{dn}{d\lambda}, \end{aligned}$$

wobei $\frac{d}{2} = a \cdot \sin\gamma/2$ verwendet wurde.

Damit ist für das Auflösungsvermögen die Beziehung

$$R := \frac{\lambda}{\delta\lambda} = d \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \quad (11)$$

hergeleitet worden.⁵

1.3 Das Hartmann-Verfahren

Bei der Auswertung der im Versuch gewonnenen Meßdaten kann man verschiedene Wege einschlagen. Um die Wellenlängen der Balmerlinien zu finden, kann man entweder eine graphische Lösungsmethode wählen oder auf numerische Verfahren zurückgreifen. Eines davon soll hier kurz beschrieben werden, da es auch in unserer Auswertung zumindest zu einem bestimmten Anteil zur Anwendung kommt.

Beim Hartmann-Verfahren⁶ handelt es sich um eine Interpolationsmethode, d.h. man verwendet ein bekanntes Referenzspektrum zur Berechnung unbekannter Wellenlängen. Dazu geht man zunächst davon aus, dass die Wellenlängen ausgedrückt werden können durch

$$\lambda_i = A + \frac{B}{d_i - C}, \quad (12)$$

⁵siehe Gerthsen, Abschn. 10.1.6

⁶Melissinos, Kapitel 3, The Prism Spectrograph.

wobei $i = 1, 2, 3$ und d_i den Abstand der jeweiligen Spektrallinie zu einem willkürlich festgelegten Ursprung angibt. A , B und C sind Konstanten. Diese können berechnet werden, falls zu jeder unbekanntem Linie drei Referenzlinien bekannt sind. Es gilt nämlich:

$$A = \lambda_i + \frac{B}{C - d_i}$$

$$B = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \frac{(C - d_1)(C - d_2)}{d_1 - d_2}$$

$$C = \frac{(R \cdot d_1) - d_3}{R - 1}, \quad \text{wobei} \quad R = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \frac{d_2 - d_3}{d_1 - d_2}$$

Damit dieses Verfahren halbwegs genaue Werte liefert, sollten die unbekanntem Linien möglichst zwischen den drei jeweiligen Referenzlinien liegen. Zu beachten ist auch, dass man für *jede* zu bestimmende Wellenlänge drei eigene Vergleichslinien braucht.

2 Versuchsaufbau und Durchführung

2.1 Der Prismenspektralapparat

Der grobe Aufbau des Prismenspektrographen ist in folgender Abbildung dargestellt:

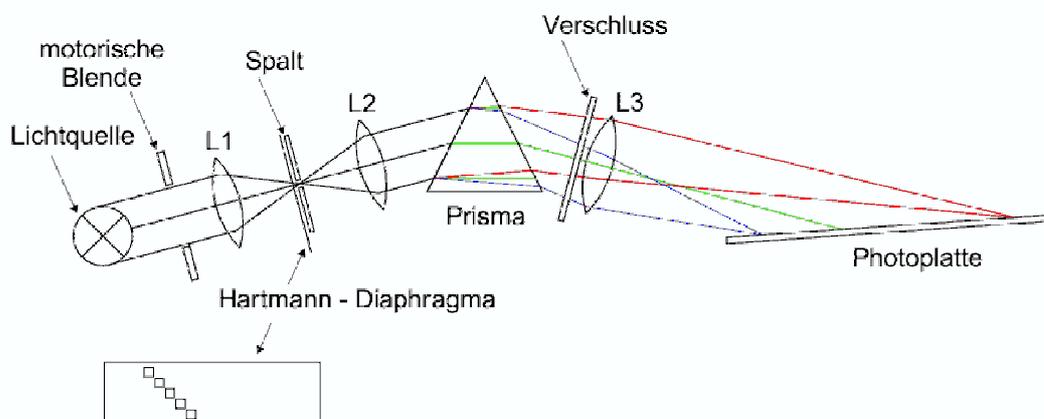


Abbildung 2: Schematische Zeichnung des Spektrographen

Dieser Aufbau des Spektrographen ist von einem Holzgehäuse umgeben, damit möglichst wenig Streulicht an die Apparatur gelangt. Zudem kann die Bildebene während der Messungen noch mit einer schwarzen Plastikfolie bedeckt werden.

Auf einer Metallschiene, auf der bereits die Linsen 1 und 2 sowie Spalt und Blende befestigt sind, können nacheinander die verschiedenen Lampen (Hg, HgCd und H) angebracht werden.

Linse 1 dient dazu, am Ort des Beleuchtungsspalt (mit dem Hartmann-Schieber, der jeweils nur eine bestimmte Zeile des Films beleuchtet) einen scharf gebündelten Lichtstrahl zu erzeugen, welcher dahinter wieder auffächert und durch Linse 2 in ein paralleles Lichtbündel verwandelt wird, welches die geöffnete Blende passiert und dann auf das Dispersionsprisma trifft. Es erfolgt eine Aufspaltung des Lichtes in verschiedene Spektrallinien, die dann dank der fokussierenden Linse 3 an unterschiedlichen Positionen auf dem Schirm am Ausgang des Prismenspektrographen beobachtet werden können. Alternativ kann man auch eine szintillierende Mattscheibe benutzen, um die UV-Linien ebenfalls sehen zu können. Um das Foto des Spektrums aufzunehmen, muss man nach der Justierung des Apparates den Schirm durch die Kassette mit dem Film ersetzen.

Die Belichtungszeiten können mit Hilfe einer motorischen Blende geeignet eingestellt werden; zur Justierung wählt man die Schalterstellung „unendlich“.

2.2 Justierung des Apparates

Zunächst sollte die erste Lampe (Hg) so ausgerichtet werden, dass der Spalt optimal ausgeleuchtet ist. Linse 1 muss gegebenenfalls auf der Schiene noch ein wenig verschoben werden, bis die Lampe scharf auf den Spalt abgebildet wird. Es ist auch möglich, die Position der gesamten Schiene zu verändern. Bei der Justierung kann die Breite des Beleuchtungsspalt ein wenig größer gewählt werden als empfohlen (5 - 6 Skalenteile), um ein helleres Bild zu erhalten.

Schließlich muss auch noch die Neigung der Bildebene geeignet eingestellt werden; man erreicht dies durch Verstellen der drei Justierschrauben am hinteren Teil des Apparates. Dies ist notwendig, da aufgrund von Linsenfehlern (die bei Quarzlinsen recht stark auftreten) die Spektrallinien nicht nur schräg stehen können, sondern auch gebogen erscheinen. Mit Hilfe der drei Schrauben lassen sich diese unerwünschten Effekte größtenteils kompensieren; außerdem gelingt es damit, die Linienschärfe zu verbessern.

Die Justierung sollte möglichst mit den beiden leuchtintensiveren Lampen Hg und HgCd vorgenommen werden, da dies im Fall der Wasserstofflampe sehr schwierig ist. Es ist vorteilhaft, die optimalen Lampenpositionen mit einem Bleistiftstrich auf der Unterlage zu markieren, damit man später beim Wechsel der Lampen keine größeren Änderungen mehr vornehmen muss.

Leider konnten wir für die Wasserstofflampe keine eigene Justierung durchführen, da wir weder auf dem Szintillatorschirm noch mit bloßem Auge bei direkter Beobachtung Anhaltspunkte für eine Einstellung des Apparates finden konnten. Dies lag zum einen an der sehr geringen Intensität der Lampe als auch daran, dass wir überhaupt keine Spektrallinien sehen konnten und uns auf die photographische Aufnahme verlassen mussten. (Dies erklärt auch die hohe Belichtungszeit für das Wasserstoffspektrum.)

2.3 Aufnahme der Spektren

Als endgültige Breite des Beleuchtungsspalt es wählten wir 6 Skalenteile, entsprechend $60 \mu\text{ m}$.

Da für die Auswertung Referenzspektren mit genau bekannten Linien(positionen) benötigt werden, sollen auf dem fertigen Film außer dem Wasserstoffspektrum noch insgesamt 4 Eichspektren vorhanden sein. Aus der Tabelle in der Praktikumsanleitung kann man eine ausreichende Anzahl von Hg- und Cd-Linien entnehmen. Um aber die Quecksilberlinien von denen des Cadmiums unterscheiden zu können, muss von einem der Elemente ein Einzelspektrum aufgenommen werden (hier: Hg). Außerdem werden die beiden Referenzspektren zweimal aufgenommen - einmal vor der Aufnahme des Wasserstoffspektrums und einmal danach -, um feststellen zu können, ob sich während der relativ langen Gesamtdauer der Durchführung an der Apparatur etwas verändert hat (Verrutschen des Films, versehentliche Änderung der Einstellung des Spektrographen). Es ist daher nicht Sinn der Sache, die beiden Hg-Aufnahmen und die HgCd-Aufnahmen direkt hintereinander auf unterschiedlichen Filmpositionen zu machen, um sich den ein oder anderen Lampenwechsel zu ersparen!

Nachdem wir in der Dunkelkammer den Film in die Kassette einglegt hatten (Beschreibung siehe Praktikumsanleitung,) konnten wir die Filmkassette am Prismenspektralapparat anbringen und nach der Entfernung des Lichtschuttschiebers mit der Belichtung des Films beginnen. Wir haben dabei folgende Reihenfolge und Belichtungszeiten gewählt:

Zeile	Lampe	Belichtung
1	Hg	0,8 sec
2	HgCd	2 sec
3	H	ca. 60 min
4	HgCD	2 sec
5	Hg	1 sec

2.4 Entwickeln des Films

Wie in der Beschreibung angegeben, wurde der Film in der Dunkelkammer zunächst aus der Kassette entnommen und in die lichtdichte Entwicklungsdose gelegt. Die Entwicklung erfolgte über einen Zeitraum von ca. 7 min in der Entwicklerlösung mit 5 ml AGFA Rodinal und 125 ml Wasser. Nach dem gründlichen Ausspülen der Dose wurde dann die Fixierlösung (15 ml AGFA Afix mit 105 ml Wasser) für ca. 8 min eingefüllt.

Sowohl beim Entwickeln als auch beim Fixieren haben wir darauf geachtet, die Dose ständig horizontal hin und her zu rollen, damit alle Teile des Films möglichst gleichmäßig mit der Lösung in Berührung kommen.

Zum Schluss wurde der Film ca. 20 min unter langsam fließendem Wasser abgespült. Danach mussten natürlich noch alle verwendeten Geräte sorgfältig gereinigt werden.

Unser fertiges Foto sieht so aus:

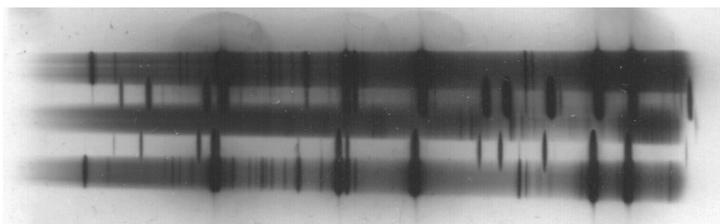


Abbildung 3: Aufnahme der Spektren, Original im Anhang

3 Auswertung der Daten

3.1 Ausmessen der Spektrallinien

Beim Vermessen der Spektren haben wir zunächst festgestellt, dass die Positionen der beiden Referenzreihen $(\text{Hg, HgCd})_1$ und $(\text{Hg, HgCd})_2$ nicht übereinstimmen. Es muss also entweder vor oder nach der Aufnahme mit der Wasserstofflampe an der Apparatur etwas verstellt worden sein. Möglicherweise ist dies beim Lampenwechsel passiert, eine genaue Ursache können wir aber nicht feststellen.

Da wir zur Eichung aber nur eine Eichreihe verwenden können (die andere ist ja wegen des Positionsunterschiedes unbrauchbar!), müssen wir zunächst beide Reihen untersuchen und dann herausfinden, welche die richtige ist.

In der Tabelle im Anhang haben wir alle erkennbaren Linien sämtlicher Spektren sowie ihre relativen Positionen auf dem Foto festgehalten. Jeder Linie wurde dabei eine Intensität auf einer Skala von 1 bis 10 zugewiesen. Bei den breiteren und intensiveren Linien haben wir jeweils die Position des Linienanfanges und die des Endes notiert. Daraus wurde schließlich eine mittlere Linienposition berechnet.

Angesichts der Fülle von ausgemessenen Linienpositionen waren wir etwas überrascht, wie wenige davon sich mit ausreichender Sicherheit auf einer Referenzlinie aus der Tabelle im Praktikumsskript⁷ zuordnen ließen. Vor allem stellten wir merkbare Unterschiede zwischen unseren geschätzten Intensitäten und den in der Vergleichstabelle angegebenen fest (trotz Berücksichtigung der stark unterschiedlichen Skalierung). Außerdem ist uns aufgefallen, dass es einen deutlichen Unterschied zwischen den verschieden lang belichteten Hg-Spektren gibt, sowohl hinsichtlich der Anzahl der abgebildeten Linien als auch in Bezug auf Linienintensität und Kontrastschärfe.

Die Quecksilberdampfampe war die hellste von allen, daher verwundert es nicht, dass die Intensität trotz der kurzen Belichtungszeit recht hoch ist. Seltsam ist allerdings, dass wir bei dem Hg-Spektrum wesentlich mehr Linien beobachten als bei der HgCd-Aufnahme, obwohl doch an letzterer zwei verschiedene Elemente beteiligt sind. Eventuell sind die zusätzlichen Linien beim Hg auf Verunreinigungen der Lampe zurückzuführen.

3.2 Zuordnung der Referenzlinien von Hg und Cd

In der folgenden Tabelle sind die von uns in den beiden Sätzen von Referenzspektren identifizierten Linien mit den angegebenen Wellenlängen zusammengestellt. Bei einigen Kandidaten war die Zuordnung nicht sicher genug, um sie in die Berechnung der Eichkurve miteinzubeziehen; diese sind mit einem Fragezeichen markiert. Die laufenden Nummern wurden mit angegeben, um die betreffende Linie in der ausführlichen Tabelle aller unserer ausgemessenen Linien leichter wiederfinden zu können.

Lfd. Nr.	Element	mittlerer Abstand d/cm	$\lambda_{Luft}/\text{\AA}$
4	Hg	17,4895	5790,660
6	Hg	17,2145	5460,740
8	Cd	16,8295	5085,822
9	Hg?	16,7320	4916,07?
10	Cd	16,4780	4799,912
11	Cd	16,3090	4678,149
13	Hg	15,8010	4358,330
14	Hg?	15,7160	4347,49?
15	Hg?	15,3300	4339,22?
16	Hg?	15,2625	4077,83?
17	Hg	15,1905	4046,560
25	Hg	14,2285	3663,280
26	Hg	14,2005	3654,840
27	Hg	14,1800	3650,150
28	Cd	14,0700	3610,508
30	Cd	13,6035	3466,200
31	Cd	13,3820	3403,652

Tabelle 1: Zugeordnete Wellenlängen aus Referenzspektrum 1

⁷ursprünglich aus Reader/Corliss: Wavelength and Transition Probabilities for Atoms and Atomic Ions

laufende Nr.	Element	mittlerer Abstand d/cm	$\lambda_{Luft}/\text{\AA}$
2	Hg	17,4460	5790,660
3	Hg	17,4450	5789,660
4	Hg	17,1705	5460,740
5	Cd	16,7850	5085,822
7	Cd	16,4285	4799,912
8	Cd	16,2600	4678,149
9	Hg	15,7455	4358,330
11	Hg	15,1325	4046,560
15	Hg	14,1635	3663,280
16	Hg	14,1410	3654,840
17	Hg	14,1240	3650,150
18	Cd	14,0090	3610,508
19	Cd	13,5440	3466,200

Tabelle 2: Zugeordnete Wellenlinien aus Referenzspektrum 2

Es sind nicht in beiden Sätzen die gleichen Linien enthalten; dies stellt sich jedoch als glücklicher Umstand heraus, denn so ist es uns in der zweiten Serie gelungen, eine Doppellinie aufzulösen (zweite Tabelle, Linien Nummer 2 und 3, Hg). Sie wurde in der ersten Serie nicht aufgelöst. Diese wird später mit zur Abschätzung des Auflösungsvermögens herangezogen. Die Unterschiedlichkeit der Spektren ist wohl auf die verschiedenen lang gewählten Belichtungszeiten für Hg zurückzuführen.

3.3 Umrechnung in Vakuumwellenlängen

Mit Hilfe der Tabelle aus der Praktikumsanleitung haben wir ein Diagramm erstellt, in dem der Brechungsindex n gegen die Wellenlänge in Luft aufgetragen ist.

Wir führten mehrere Fits mit Polynomen unterschiedlichen Grades durch, um festzustellen, ab welchem Grad sich die Qualität des Fits nicht mehr merklich ändert. Ein Polynom vom Grad 6 stellt einen akzeptablen Kompromiss dar.

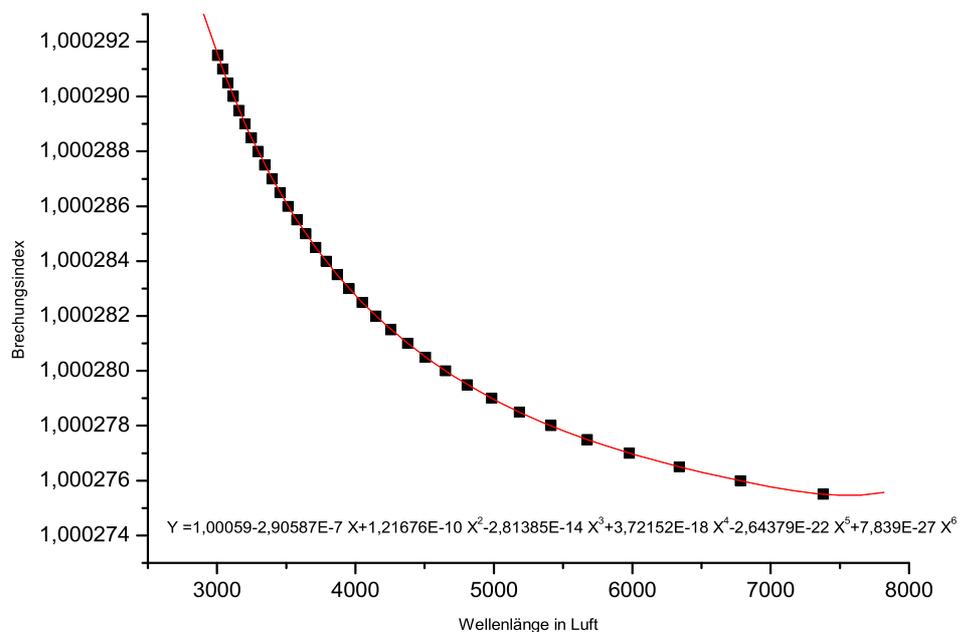


Abbildung 4: Dispersion in Luft

3.4 Bestimmung der Wasserstofflinien

3.4.1 Graphische Auswertung

Um die Wellenlängen der aufgezeichneten Wasserstofflinien herauszufinden, haben wir zunächst auf dem PC mit Origin 7.0 zwei Plots angefertigt, in denen die zugeordneten Wellenlängen gegen den Abstand aufgetragen werden. Da der Ursprung dabei frei gewählt werden kann, haben wir alle Positionen in Bezug auf die 18cm-Marke angegeben (daher unterscheiden sich die Werte im Graphen von denen in der Tabelle).

In das gleiche Diagramm wurden auch die Positionen der Wasserstofflinien eingetragen. Anschließend haben wir eine Trendlinie durch die einzelnen Messwerte gelegt. Mit Hilfe des Statistikprogramms ist danach eine sehr komfortable und präzise Ablesung der Schnittpunkte möglich. Natürlich enthält unser Foto auch einige Linien des molekularen Wasserstoffs, die von denen der Balmerserie zu trennen sind. Ein wichtiges Kriterium hierbei war für uns die Intensität (wobei gesagt werden muss, dass wie erwartet generell die H-Linien sehr viel schwächer waren als die des Referenzspektrums). Bei der graphischen Auswertung richtet sich der Fehler sowohl nach der Genauigkeit des Trendlinienverlaufes als auch nach der Ablesung, wobei der Beitrag der Trendlinie als größer anzusehen ist. Die Ablesegenauigkeit des Komparators ist mit 0,02 cm so hoch, dass alle anderen Fehler darüber liegen dürften. Da diese jedoch in spätere Rechnungen nicht mit eingehen, verzichten wir darauf, über die Größe der Fehler zu spekulieren, denn genaue Angaben wären uns sowieso nicht möglich.

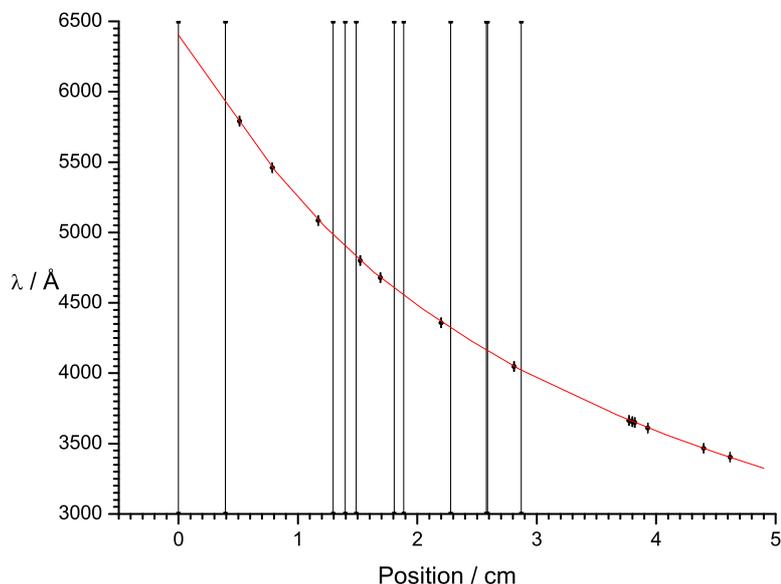


Abbildung 5: Graphische Bestimmung der H-Linien 1. Referenz

Lfd. Nr.	$\lambda_{Luft}/\text{Å}$	$\lambda_{Vakuum}/\text{Å}$	Ordnung
1	6404,58	6406,348	$H_{\alpha}, n = 3$
2	4985,499	4986,914	-
3	4902,262	4903,655	-
4	4829,176	4830,550	$H_{\beta}, n = 4$
5	4605,858	4607,172	-
6	4555,104	4556,404	-
7	4317,575	4318,811	$H_{\gamma}, n = 5$
8	4165,313	4166,508	-
9	4159,223	4160,416	-
10	4021,172	4022,328	$H_{\delta}, n = 6$

Tabelle 3: Ergebnis der graphischen Zuordnung der H-Linien (1. Referenz)

Erkennbar ist vor allem die große Differenz der bestimmten H_{α} -Linie im Vergleich zum Literaturwert. Dies

erklärt sich dadurch, dass um die erste Wasserstofflinie herum keine Referenzlinien des Hg-/Cd-Spektrums zur Verfügung standen und deshalb die Interpolation an dieser Stelle sehr ungenau ausfällt. Das gleiche Verfahren wird bei den zweiten Referenzspektren angewendet:

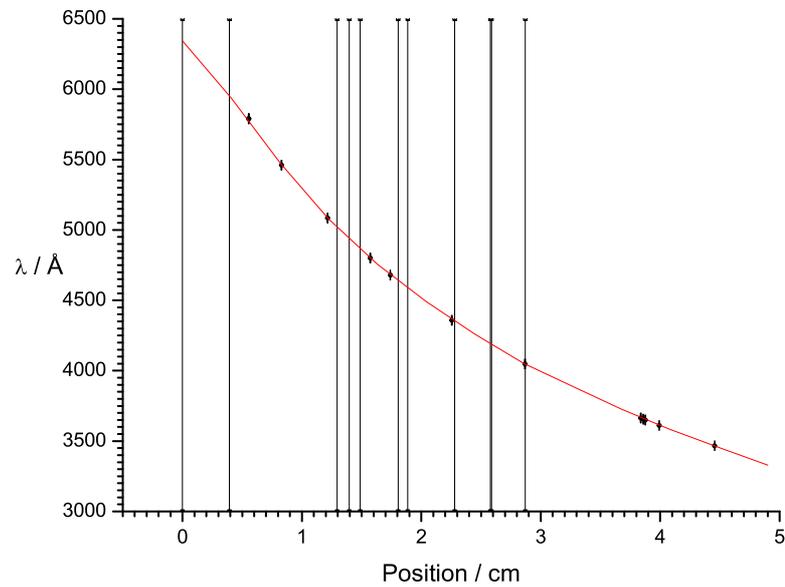


Abbildung 6: Graphische Bestimmung der H-Linien 2. Referenz

Lfd. Nr.	$\lambda_{Luft}/\text{Å}$	$\lambda_{Vakuum}/\text{Å}$	Ordnung
1	6343,855	6345,640	$H_{\alpha}, n = 3$
2	5021,044	5022,469	-
3	4941,498	4942,902	-
4	4867,845	4869,229	$H_{\beta}, n = 4$
5	4635,101	4636,422	-
6	4585,017	4586,324	-
7	4343,434	4344,677	$H_{\gamma}, n = 5$
8	4193,182	4194,384	-
9	4190,236	4191,438	-
10	4045,875	4047,038	$H_{\delta}, n = 6$

Tabelle 4: Ergebnis der graphischen Zuordnung der H-Linien (2. Referenz)

3.4.2 Numerische Auswertung

Zur numerischen Auswertung der Messdaten wurde wiederum im Diagramm eine Trendlinie genutzt. Wir näherten den Verlauf der Kurve durch ein Polynom 4. Grades und erhielten dadurch eine hinreichende Näherung für die erkannten Vergleichslinien. Mit Hilfe des Polynoms und der Positionswerte der Wasserstofflinien konnten schließlich die Wellenlängen der Wasserstofflinien errechnet werden. Im folgenden die zwei verschiedenen Diagramme für die zwei Referenzspektren mit den erhaltenen Polynomen und die jeweils aus den Polynomen errechneten Wellenlängen der H-Linien.

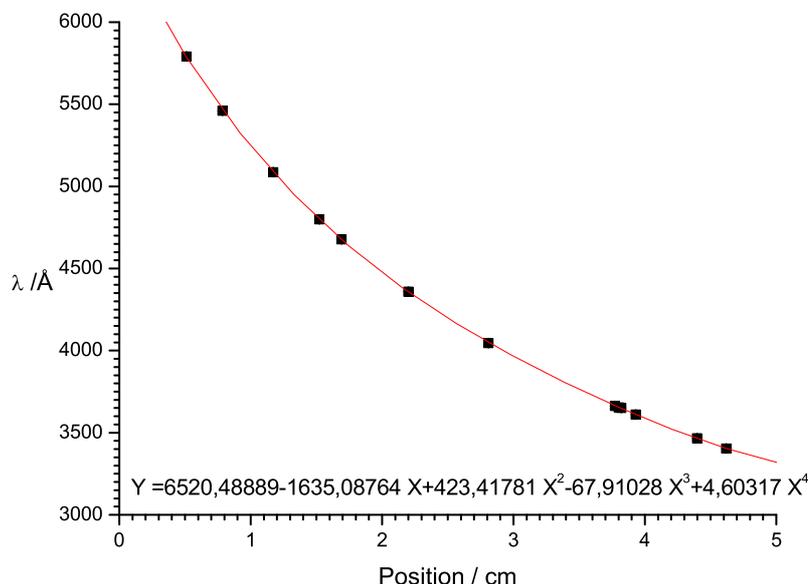


Abbildung 7: Referenzspektrum 1

Lfd.Nr.	Position x / cm	$\lambda_{Luft}/\text{Å}$	$\lambda_{Vakuum}/\text{Å}$	Ordnung
1	0	$6520,489 \pm 10,973$	$6522,323 \pm 10,979$	$H_{\alpha}, n = 3$
2	1,295	$4978,595 \pm 0,848$	$4980,008 \pm 0,849$	-
3	1,395	$4896,599 \pm 0,734$	$4897,991 \pm 0,735$	-
4	1,487	$4824,578 \pm 0,584$	$4825,951 \pm 0,584$	$H_{\beta}, n = 4$
5	1,805	$4598,161 \pm 0,118$	$4599,472 \pm 0,118$	-
6	1,886	$4545,474 \pm 0,310$	$4546,770 \pm 0,310$	-
7	2,280	$4313,081 \pm 1,094$	$4314,315 \pm 1,094$	$H_{\gamma}, n = 5$
8	2,578	$4159,079 \pm 1,361$	$4160,273 \pm 1,362$	-
9	2,588	$4154,183 \pm 1,364$	$4155,375 \pm 1,365$	-
10	2,870	$4022,354 \pm 1,276$	$4023,511 \pm 1,277$	$H_{\delta}, n = 6$

Tabelle 5: Wasserstofflinien nach 1. Referenzspektrum

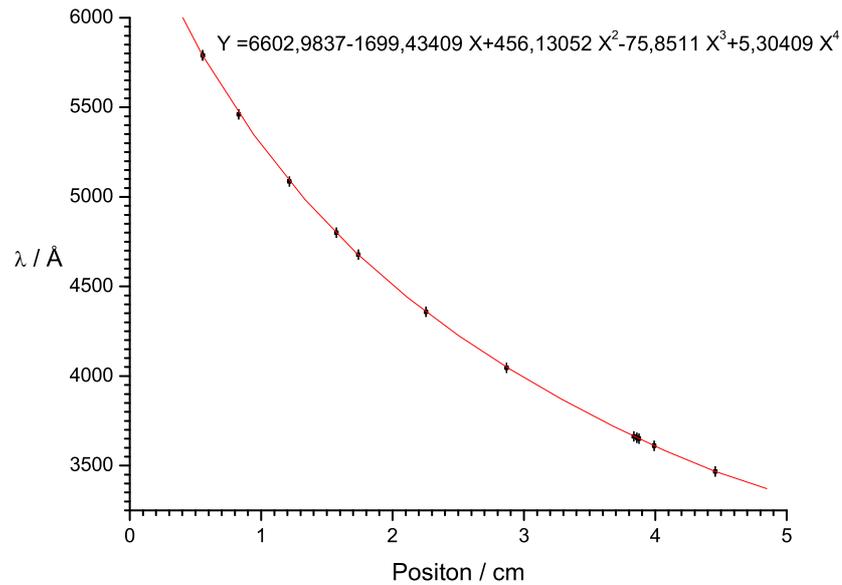


Abbildung 8: Referenzspektrum 2

Lfd.Nr.	Position x / cm	$\lambda_{Luft}/\text{\AA}$	$\lambda_{Vakuum}/\text{\AA}$	Ordnung
1	0	$6602,984 \pm 11,021$	$6604,840 \pm 11,027$	$H_{\alpha}, n = 3$
2	1,295	$5017,347 \pm 1,058$	$5018,771 \pm 1,059$	-
3	1,395	$4934,088 \pm 0,916$	$4935,490 \pm 0,915$	-
4	1,487	$4861,041 \pm 0,739$	$4862,423 \pm 0,739$	$H_{\beta}, n = 4$
5	1,805	$4631,831 \pm 0,034$	$4633,151 \pm 0,034$	-
6	1,886	$4578,567 \pm 0,237$	$4579,873 \pm 0,238$	-
7	2,280	$4343,743 \pm 1,036$	$4344,986 \pm 1,037$	$H_{\gamma}, n = 5$
8	2,578	$4188,006 \pm 1,278$	$4189,207 \pm 1,279$	-
9	2,588	$4183,049 \pm 1,280$	$4184,249 \pm 1,281$	-
10	2,870	$4049,461 \pm 1,158$	$4050,625 \pm 1,159$	$H_{\delta}, n = 6$

Tabelle 6: Wasserstofflinien nach 2. Referenzspektrum

3.4.3 Diskussion der Verfahren

Anhand der erhaltenen Ergebnisse ist ersichtlich, dass beim zweiten Hg-/Hg-Cd-Referenzspektrum die H-Linien H_{β} und H_{γ} näher am Literaturwert von $H_{\beta} = 4861\text{\AA}$ und $H_{\gamma} = 4340\text{\AA}$ liegen. Die H_{α} -Linie wird hingegen durch das 1. Referenzspektrum besser getroffen. Sie sollte nach dem Literaturwert bei $H_{\alpha} = 6563\text{\AA}$ liegen. Ein Erklärung wäre, dass das Spektrum der Wasserstofflampe genau so verrutscht ist, wie das 2. Referenzspektrum und die Justierung des Versuchs vor Beginn der Belichtung nicht ausreichend für die korrekte Darstellung der H_{α} -Linie war. Sehr gut sichtbar ist, dass die numerische Bestimmung der Wellenlängen näher an den Sollwert herankommt, was sicherlich auch auf den besseren Fit mit einem höhergradigem Polynom zurückzuführen ist. Ob die Linie mit der lfd. Nr. 10 tatsächlich der $H_{\delta} = 4102\text{\AA}$ entspricht, lässt sich auch nicht Bestimmtheit sagen. Für eine klare Aussage wäre es sicher angemessen gewesen, die Belichtungszeit des Wasserstoff-Spektrums zu erhöhen und dadurch einen höheren Kontrast auf dem Film zu erhalten.

3.5 Bestimmung der Rydberg-Konstante

Nachdem wir die Spektrallinien des Wasserstoffs mit Hilfe der oben genannten Verfahren bestimmt haben, kann man aus den erhaltenen Wellenlängen nun die Rydberg-Konstante bestimmen. Dazu wird die Formel

$$R_\infty = \frac{1}{\lambda \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)}$$

genutzt. Für die Einzelwerte aus der ersten Vergleichsreihe erhalten wir folgende Werte:

Ordnung (n)	$\lambda_{Vakuum}/\text{Å}$	R_H/cm^{-1}
$H_\alpha, n = 3$	$6522,323 \pm 10,979$	$110390,123643 \pm 185,509343$
$H_\beta, n = 4$	$4825,951 \pm 0,584$	$110513,633801 \pm 13,386349$
$H_\gamma, n = 5$	$4314,315 \pm 1,094$	$110374,520379 \pm 27,987066$
$H_\delta, n = 6$	$4023,511 \pm 1,277$	$111842,619636 \pm 35,483310$

Aus der ersten Vergleichsreihe erhalten wir für die Rydberg-Konstante einen durch Bildung eines gewichteten Mittelwertes:

$$R_\infty = (110627,487 \pm 11,4105) \text{ cm}^{-1}.$$

Umrechnung mit Hilfe der reduzierten Masse liefert schließlich

$$R_H = (110567,2702 \pm 11,4043) \text{ cm}^{-1}.$$

Das gleiche Verfahren für die zweite Vergleichsreihe

Ordnung (n)	$\lambda_{Vakuum}/\text{Å}$	R_H/cm^{-1}
$H_\alpha, n = 3$	$6604,840 \pm 11,027$	$109.010,967914 \pm 181,699309$
$H_\beta, n = 4$	$4862,423 \pm 0,739$	$109.684,687221 \pm 16,675399$
$H_\gamma, n = 5$	$4344,986 \pm 1,037$	$109.595,400809 \pm 26,151030$
$H_\delta, n = 6$	$4050,625 \pm 1,159$	$111.093,974664 \pm 31,782207$

ergibt folgende Rydberg-Konstante:

$$R_\infty = (109889,3747 \pm 12,8260) \text{ cm}^{-1}.$$

Genau wie oben erhalten wir

$$R_H = (109829,5596 \pm 12,8190) \text{ cm}^{-1}.$$

3.6 Auflösungsvermögen der Apparatur

Das Auflösungsvermögen des Prismas läßt sich über $R := \frac{\lambda}{\delta\lambda} = d \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$ bestimmen. Nimmt man zum Beispiel für die Dispersion in Luft den für den sichtbaren Wellenlängenbereich plausiblen Wert von $\frac{dn}{d\lambda} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ nm}^{-1}$ an und verwendet für das Prisma als ausgeleuchtete Basisbreite $d = 6,5 \text{ cm}$, so ergibt sich für das Prisma selbst ein theoretisches Auflösungsvermögen von

$$R = 300.000 \text{ m}^{-1} \cdot 0,065 \text{ m} = 19.500.$$

Es ist aber klar, dass dies nicht dem Auflösungsvermögen der Gesamtapparatur entspricht. Aufgrund der schon erwähnten Tatsache, dass Quarzlinsen und -prisma starke Fehler verursachen, diese jedoch nur bei der letzten Linse durch die verstellbare Bildebene einigermaßen kompensiert werden können, ergibt sich eine schlechtere Auflösung. Hinzu kommt noch ein - wenn auch sehr kleiner - Einfluss der Linienverbreiterung, die im Theorie-teil schon erörtert wurde, sowie die Tatsache, dass Beugungseffekte bei einer Spaltbreite von $60 \mu \text{ m}$ eventuell ebenfalls eine Rolle spielen (zwei Größenordnungen Unterschied zwischen Spaltbreite und betrachteten Wellenlängen).

Zur groben Abschätzung des gesamten Auflösungsvermögens haben wir noch die Möglichkeit, gerade noch trennbare benachbarte Linien zu untersuchen. Dies liefert jedoch nur eine sehr vage bestimmte Untergrenze für das Auflösungsvermögen. Leider können wir uns auch nur auf sehr wenige Linienpaare stützen; um eine exaktere Aussage machen zu können, sollten möglichst viele Paare in unterschiedlichen Wellenlängenbereichen

bekannt sein.

Zur Verfügung stehen uns eng zusammenliegende Linien im „langwelligen“ und im „kurzwelligen“ Bereich des aufgenommenen Hg-Spektrums:

- $\lambda_1 = 5789,66 \text{ \AA}$ und $\lambda_2 = 5790,66 \text{ \AA}$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} > 5790,66$$

- $\lambda_1 = 3650,15 \text{ \AA}$ und $\lambda_2 = 3654,84 \text{ \AA}$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} > 913,5$$

- $\lambda_1 = 3654,84 \text{ \AA}$ und $\lambda_2 = 3663,28 \text{ \AA}$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} > 434,04$$

Beim Cd-Spektrum liegen folgende Linien recht eng zusammen:

- $\lambda_1 = 3403,652 \text{ \AA}$ und $\lambda_2 = 3466,200 \text{ \AA}$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} > 55,39 \text{ (offenbar nicht die beste Wahl zur Ermittlung der Untergrenze von R).}$$

Schließlich konnten wir noch folgende Wasserstofflinien trennen:

- $\lambda_1 = 4160,416 \text{ \AA}$ und $\lambda_2 = 4166,508 \text{ \AA}$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} > 683,93.$$

Wie man sieht, liefert das erstgenannte Hg-Linienpaar mit 5.790,66 die höchste Untergrenze, gefolgt von dem zweiten Hg-Paar. Erstaunlicherweise liefert auch das auf unserem Foto qualitativ schlechteste Spektrum, nämlich das des Wasserstoffs, einen annehmbaren Wert (der jedoch eine Größenordnung schlechter ist als der beste Wert).

Verglichen mit dem theoretischen Auflösungsvermögen des Prismas sind diese Untergrenzen tatsächlich sehr niedrig.

4 Schlussbemerkungen und Referenzen

4.1 Diskussion der Ergebnisse

Nachdem nun die gesamte Auswertung für *beide* Referenzspektren erfolgt ist, nehmen wir an, dass auf dem Film das Wasserstoffspektrum die gleiche Verschiebung aufweist wie unsere zweite Eichaufnahme. Dies macht sich dadurch bemerkbar, dass der daraus ermittelte Wert für die Rydberg-Konstante näher am Literaturwert liegt (welcher laut Mayer-Kuckuk $R_H = 109677,5854(83) \text{ cm}^{-1}$ beträgt).

Bei der Auswertung bestätigte sich unsere Erwartung, dass die numerische Methode genauere Ergebnisse liefert als die graphische. Die bei der numerischen Auswertung in Tabelle 5 und 6 angegebenen Fehler stammen wie erwähnt aus dem Statistik-Programm von Origin 7.0. Sie wurden unter Berücksichtigung der Ablesegenauigkeit des Komparators errechnet. Unberücksichtigt blieben dabei jedoch eventuell falsch zugeordnete Linien sowie die Tatsache, dass die der Referenztabelle in der Versuchsanleitung angegebenen Wellenlängen ja auch keine Fehlerangaben enthielten. Des weiteren stellt die Umrechnung der Wellenlängen in Luft zu Vakuumwellenlängen auch nur ein Näherungsverfahren dar.

Noch ein Wort zur H_α -Linie: Da diese Linie so weit am Rand der Aufnahme liegt, hatten wir in diesem Bereich keine Referenzlinien, wodurch die Bestimmung sowohl mit der Trendlinie als auch mit dem Polynom-Fit sehr ungenau wurde. Der Fehler bei der numerischen Auswertung ist dann auch entsprechend groß.

Die Tabellen, welche unsere gesamten ausgemessenen Linien enthalten, finden sich im Anhang. Dort legen wir auch das Originalfoto bei.

4.2 Literatur

Zur Vorbereitung auf den Versuch haben wir die folgenden Bücher verwendet:

- Kuhn: Atomic Spectra
- Heckmann/Träbert: Einführung in die Spektroskopie der Atomhülle
- Schwabl: Quantenmechanik I
- Haken/Wolf: Atom- und Quantenphysik
- Mayer-Kuckuk: Atomphysik
- Demtröder: Experimentalphysik, Band 3
- Gerthsen: Physik (17. Auflage)
- Melissinos: Experiments in Modern Physics
- Schmidt: Optische Spektroskopie

Tabellenverzeichnis

1	Zugeordnete Wellenlängen aus Referenzspektrum 1	13
2	Zugeordnete Wellenlinien aus Referenzspektrum 2	14
3	Ergebnis der graphischen Zuordnung der H-Linien (1. Referenz)	15
4	Ergebnis der graphischen Zuordnung der H-Linien (2. Referenz)	16
5	Wasserstofflinien nach 1. Referenzspektrum	17
6	Wasserstofflinien nach 2. Referenzspektrum	18

Abbildungsverzeichnis

1	Lorentz-Kurve	7
2	Schematische Zeichnung des Spektrographen	11
3	Aufnahme der Spektren, Original im Anhang	12
4	Dispersion in Luft	14
5	Graphische Bestimmung der H-Linien 1. Referenz	15
6	Graphische Bestimmung der H-Linien 2. Referenz	16
7	Referenzspektrum 1	17
8	Referenzspektrum 2	18

5 Anhang