

Protokoll zu

Versuch E-112
Zeeman- und Paschen-Back-Effekt

Fortgeschrittenen-Praktikum Teil I
Wintersemester 2002/2003

Von
Jan Stillings, Kathrin Valerius

Semesterzahl: 7
Hauptfach: Physik
Gruppe α 2

Assistent: Jens Barth
Datum: 28. Okt. 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	3
1.1	Atome im Magnetfeld: Zeeman- und Paschen-Back-Effekt	3
1.1.1	Zeeman-Effekt	3
1.1.2	Paschen-Back-Effekt	5
1.1.3	Auswahlregeln optischer Übergänge	5
1.1.4	Clebsch-Gordan-Koeffizienten	6
1.2	Beobachtete Übergänge in Cadmium und Helium	7
1.3	Optische Instrumente	9
1.3.1	Lummer-Gehrcke-Platte	9
1.3.2	Fabry-Pérot-Interferometer	10
2	Versuchsaufbau	12
2.1	Zeemann-Effekt	12
2.2	Paschen-Back-Effekt	12
3	Versuchsdurchführung und Auswertung	14
3.1	Zeeman-Effekt	14
3.1.1	Eichung des Magnetfeldes	14
3.1.2	Untersuchung der Zeeman-Aufspaltung an Cd	15
3.1.3	Bestimmung des Bohrschen Magnetons μ_B	16
3.1.4	Bestimmung des Auflösungsvermögens der Lummer-Gehrcke-Platte	17
3.2	Paschen-Back-Effekt	19
3.2.1	Eichung des Magnetfeldes	19
3.2.2	Paschen-Back-Aufspaltung der gelben He-Linie	20
3.2.3	Bestimmung des Bohrschen Magnetons μ_B und des Quotienten $\frac{e}{m}$	21
4	Anhang	24

1 Theoretische Grundlagen

Ziel dieses Versuchs ist es, die Zeeman-Aufspaltung von vier Cadmium-Linien sowie die Paschen-Back-Aufspaltung der gelben Helium-Linie zu messen und aus den Ergebnissen das Bohrsche Magneton sowie die spezifische Ladung des Elektrons zu bestimmen. Es sollen hier zunächst die theoretischen Hintergründe erläutert werden.

1.1 Atome im Magnetfeld: Zeeman- und Paschen-Back-Effekt

Durch Anlegen eines äußeren Magnetfeldes werden die Energiezustände innerhalb von Atomen aufgespalten. Ist dabei die Energieverschiebung ΔE klein gegenüber der durch die Spin-Bahn-Kopplung verursachten Verschiebung ΔE_{LS} , so spricht man vom Zeeman-Effekt. Ist das Feld jedoch stark genug, um die LS-Kopplung aufzulösen (entsprechend einer großen Energieverschiebung ΔE), handelt es sich um den Paschen-Back-Effekt.

1.1.1 Zeeman-Effekt

Die quantenmechanische Betrachtung geht von der minimalen Kopplung des Impulses $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ an das Vektorpotential \vec{A} aus: $(-i\hbar\nabla) \rightarrow (-i\hbar\nabla - q\vec{A})$. Mit $q = -e$ folgt schreibt sich der Hamiltonoperator folgendermaßen:

$$H = \frac{1}{2m_e} [-i\hbar\nabla + e\vec{A}]^2 + V(\vec{x}). \quad (1)$$

Ein geeigneter Ansatz für das Vektorpotential ist $\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B} \times \vec{x}]$ (beachte $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$). Verwendet man noch die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, so erhält man:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{ie\hbar}{2m_e}\nabla\vec{A} - \frac{ie\hbar}{m}\left(\frac{1}{2}[\vec{B} \times \vec{x}] \cdot \nabla\right) + \frac{e^2}{2m} \cdot \frac{1}{4}[\vec{B} \times \vec{x}]^2 + V(\vec{x}) \\ &= \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})}_{=: H_0} + \frac{e}{2m_e}(\vec{B} \cdot \underbrace{[\vec{x} \times (-i\hbar\nabla)]}_{=\vec{L}}) + \frac{e^2}{8m_e} \underbrace{[\vec{B} \times \vec{x}]^2}_{O(\vec{B}^2) \approx 0} \\ &\Rightarrow H = H_0 + \underbrace{\frac{e\hbar}{2m_e}}_{=: \mu_B} \frac{1}{\hbar}(\vec{B} \cdot \vec{L}). \end{aligned}$$

Im Potential $V(\vec{x})$ werden sowohl das Coulomb-Potential als auch das Potential der LS-Kopplung, $V_{LS} = \xi(|\vec{x}|) \cdot (\vec{L} \cdot \vec{S})$, berücksichtigt. μ_B bezeichnet das Bohrsche Magneton.

Hat das Magnetfeld nur eine Komponente in z -Richtung, so ist dies auch die Quantisierungsachse, d.h. der Drehimpuls ist in dieser Richtung gequantelt.

$$H'_1 := \frac{\mu_B}{\hbar} B L_3 \quad (2)$$

stellt den Störoperator dieses Systems dar. Die bisherige Betrachtung erfolgte allerdings ohne Berücksichtigung des Spin. Diesen kann man durch einen weiteren Störoperator H''_1 miteinbeziehen:

$$H''_1 := \frac{g_s}{\hbar} \frac{e\hbar}{2m_e} (\vec{B} \cdot \vec{S}) \approx 2 \cdot \frac{\mu_B}{\hbar} B S_3, \quad (3)$$

wenn man annimmt, dass der g -Faktor $g_s \approx 2$ ist.

Zusammenfassend hat man also folgenden Hamiltonoperator:

$$H = H_0 + \frac{\mu_B}{\hbar} B (L_3 + 2 S_3) \quad (4)$$

$$= H_0 + \frac{\mu_B}{\hbar} B (J_3 + S_3). \quad (5)$$

Hierbei wurde der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ eingeführt¹.
 Das magnetische Moment des Gesamtsystems ist gegeben durch

$$\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S = -\frac{\mu_B}{\hbar} (g_l \vec{L} + g_s \vec{S}), \quad (6)$$

wobei $g_l = 1$ und $g_s \approx 2$ gilt.

Der Störoperator kann also ausgedrückt werden durch

$$H_1 := H_1' + H_1'' = -\vec{\mu}_J \cdot \vec{B}.$$

Die Energieverschiebung aufgrund des äußeren Magnetfeldes entspricht dem Erwartungswert des Störoperators: $\Delta E = \langle H_1 \rangle$.

Erläuterung anhand des Vektormodells

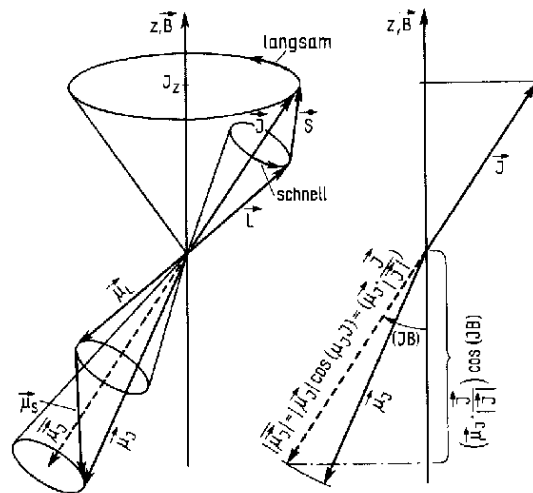


Abbildung 1: Drehimpulsvektoren und magnetische Momente beim Zeeman-Effekt

Für \vec{L} und \vec{S} ergeben sich, wie in Abb. 1 gezeigt, zu den Drehimpulsvektoren antiparallele magnetische Momente $\vec{\mu}_L$ und $\vec{\mu}_S$. Aufgrund der unterschiedlichen g-Faktoren für Bahn- und Eigendrehimpuls gilt dies jedoch im allgemeinen Fall nicht für \vec{J} und $\vec{\mu}_J$. Die magnetische Wechselwirkung V_{LS} übt ein Drehmoment auf \vec{L} und \vec{S} aus, so dass eine Präzessionsbewegung der beiden Vektoren um die Richtung von \vec{J} zustande kommt. Ebenso bewirkt die durch das äußere Magnetfeld bestimmte Wechselwirkung V_B eine Präzession von \vec{J} um die Richtung von \vec{B} (hier: z-Achse). Ähnliches gilt auch für die entsprechenden magnetischen Momente. Die Präzessionsfrequenz ist umgekehrt proportional zur Stärke der Wechselwirkung. Daraus ergibt sich für $V_{LS} \gg V_B$, dass \vec{L} und \vec{S} rasch präzedieren im Vergleich zu \vec{J} . Um die magnetische Energie zu berechnen genügt es daher, den zeitlichen Mittelwert $(\vec{\mu}_J)_J$ von $\vec{\mu}_J$ (bzw. die Projektion auf die Richtung von \vec{J}) zu betrachten:

$$\begin{aligned} V_B &= -(\vec{\mu}_J)_J \cdot \vec{B} = -(\vec{\mu}_J \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|}) (\frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} \cdot \vec{B}) \\ &= \frac{\mu_B}{\hbar} \frac{(\vec{S} + \vec{J}) \cdot \vec{J} (\vec{J} \cdot \vec{B})}{\vec{J}^2} = \frac{\mu_B B}{\hbar} J_3 \frac{\vec{J}^2 + \frac{1}{2}(\vec{J}^2 + \vec{S}^2 - \vec{L}^2)}{\vec{J}^2} \end{aligned}$$

¹Es bietet sich an, einen Basiswechsel vom System der Eigenfunktionen zu $(\vec{L}^2, \vec{S}^2, L_3$ und $S_3)$ auf Eigenfunktionen zu $(\vec{J}^2, J_3, \vec{L}^2$ und $\vec{S}^2)$ durchzuführen. Dies geschieht durch Bildung von Linearkombinationen mit Hilfe der *Clebsch-Gordan-Koeffizienten*.

Die magnetische Zusatzenergie ΔE_B erhält man als Erwartungswert von V_B (also durch Einsetzen der Eigenwerte für die Operatoren):

$$\Delta E_B = \frac{\mu_B B}{\hbar} \hbar m_J \frac{\hbar^2}{\hbar^2} \left(1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \right) =: \mu_B B m_J g_J. \quad (7)$$

Hieraus folgt, dass ein Niveau mit der Quantenzahl m_J im Magnetfeld in $(2J+1)$ Niveaus aufspaltet. Die Entartung bezüglich m_J ist somit aufgehoben. Für die Energieverschiebung im Vergleich zum ungestörten Spektrum gilt:

$$\Delta E = \Delta E_B^i - \Delta E_B^f = \mu_B B (m_J^i g_J^i - m_J^f g_J^f).$$

1.1.2 Paschen-Back-Effekt

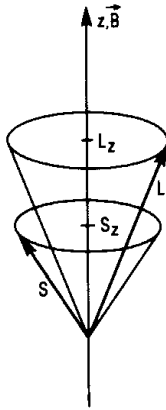


Abbildung 2: Vektormodell beim Paschen-Back-Effekt

Ist das äußere Magnetfeld so groß, dass $V_B \gg V_{LS}$ gilt, so wird die LS-Kopplung aufgebrochen; J ist dann keine „gute Quantenzahl“ mehr. \vec{L} und \vec{S} präzedieren einzeln um die Richtung des Magnetfeldes (siehe Abb. 2).

Ob das Feld als stark oder schwach gilt, ist von der Ordnungszahl des verwendeten Elements abhängig. (Was z. B. für Cd ein schwaches Feld ist, kann für He bereits ein starkes Feld sein.) Zur quantenmechanischen Beschreibung lässt man wie in Gl. (4) L und S stehen, anstatt wie in Gl. (5) den Gesamtdrehimpuls J einzuführen.

Als Energiedifferenz zum ungestörten Fall erhält man dann:

$$\Delta E_{PB} = \langle \frac{\mu_B}{\hbar} B (L_3 + 2S_3) \rangle = \mu_B B (m_L + 2m_S) = -\mu_{J,3} B.$$

Zwei Einzelverschiebungen der Zustände i und f führen zu

$$\Delta E = \mu_B B [(m_L^i + 2m_S^i) - (m_L^f + 2m_S^f)] = \mu_B B (\Delta m_L + 2\Delta m_S).$$

1.1.3 Auswahlregeln optischer Übergänge

Elektronenübergänge in Atomen von einem höheren zu einem niedrigeren Energieniveau sind mit Aussendung elektromagnetischer Strahlung verbunden, deren Energie gerade der Differenz der Energie der beteiligten Niveaus beträgt. In Spektren werden jedoch weniger Linien beobachtet als durch Kombination der einzelnen Terme miteinander möglich sein sollten. Das Nichtauftreten bestimmter Übergänge sowie die Intensitätsunterschiede beobachteter Linien haben zur Annahme von Auswahlregeln geführt, welche sich aus quantenmechanischen Betrachtungen sogar zwangsläufig ergeben.

Nach Fermis Goldener Regel ist die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden eines Überganges von einem Anfangszustand Ψ_i in einen Endzustand Ψ_f dem Betragsquadrat des Matrixelements $\langle f | \vec{j}_{\vec{k}} | i \rangle$ proportional. Hier ist \vec{k} der Wellenvektor des emittierten Photons und $\vec{j}_{\vec{k}}$ die Fouriertransformierte der Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$. Zur Betrachtung von Dipolübergängen genügt die Entwicklung der e -Funktion aus der FT und Abbruch nach der nullten Ordnung: $\langle f | \vec{j}_0 | i \rangle \propto \langle f | \vec{x} | i \rangle = \vec{d}_{fi}$ (mit dem Dipolmatrixelement \vec{d}_{fi}). Zwischen Zuständen mit $\vec{d}_{fi} = 0$ können keine Übergänge stattfinden, sie sind „verboten“.

Es sollen zunächst Auswahlregeln für die Quantenzahlen m_L und L hergeleitet werden. Dazu nimmt man an, dass $\langle i |$ und $\langle f |$ Eigenzustände von \vec{L} und L_3 sind und durch die Quantenzahlen (L, m_L)

bzw. $(L', m'_{L'})$ gekennzeichnet werden.

a) Ausgehend von $[L_3, Z] = 0$ und $[L_3, X \pm iY] = \pm \hbar (X \pm iY)$ findet man:

- $0 = \langle L' m'_{L'} | [L_3, Z] | L m_L \rangle = \hbar (m'_{L'} - m_L) \langle L' m'_{L'} | Z | L m_L \rangle$
- $0 = \langle L' m'_{L'} | [L_3, X + iY] - \hbar (X + iY) | L m_L \rangle = \hbar (m'_{L'} - m_L - 1) \langle L' m'_{L'} | (X + iY) | L m_L \rangle$
- $0 = \langle L' m'_{L'} | [L_3, X - iY] + \hbar (X - iY) | L m_L \rangle = \hbar (m'_{L'} - m_L + 1) \langle L' m'_{L'} | (X - iY) | L m_L \rangle$

Damit die Matrixelemente nicht verschwinden, muss also $m'_{L'} - m_L =: \Delta m_L = 0, \pm 1$ gelten.

b) Es gilt: $[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, \vec{X}]] = 2\hbar^2 \{\vec{X}, \vec{L}^2\}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle L' m_{L'} | [\vec{L}^2, [\vec{L}^2, \vec{X}]] - 2\hbar^2 \{\vec{X}, \vec{L}^2\} | L m_L \rangle \\
&= (\hbar^2 L'(L' + 1)) - \hbar^2 L(L + 1) \langle L' m'_{L'} | [\vec{L}^2, \vec{X}] | L m_L \rangle \\
&\quad - 2\hbar^2 (\hbar^2 L'(L' + 1) + \hbar^2 L(L + 1)) \langle L' m'_{L'} | \vec{X} | L m_L \rangle \\
&= \{(\hbar^2 L'(L' + 1) - \hbar^2 L(L + 1))^2 - 2\hbar^2 (\hbar^2 L'(L' + 1) + \hbar^2 L(L + 1))\} \langle L' m'_{L'} | \vec{X} | L m_L \rangle \\
&= \hbar^4 (L' + L)(L' + L + 2)[(L' - L)^2 - 1] \langle L' m'_{L'} | \vec{X} | L m_L \rangle.
\end{aligned}$$

Um in der letzten Zeile ein von Null verschiedenes Matrixelement zu erhalten, muss man das Verschwinden mindestens eines Klammertermes fordern. Dabei ist jedoch zu beachten, dass wegen $L, L' \geq 0$ für die mittlere Klammer $L' + L + 2 \neq 0$ folgt. Ausserdem ist zwar $L' + L = 0$ möglich, aber nicht sinnvoll, da man mit Hilfe des Paritätsoperators zeigen kann, dass dann $\langle 0 m'_{L'} | \vec{X} | 0 m_L \rangle = 0$. Übrig bleibt also nur die dritte Klammer, also $L' - L =: \Delta L = \pm 1$.

c) Für die quantisierte Komponente des Spins und die entsprechende Quantenzahl m_S gilt zusätzlich die Auswahlregel $\Delta m_S = 0$. Diese Regel wird besonders bei der Behandlung des Paschen-Back-Effekts im zweiten Versuchsteil wichtig.

Zur Untersuchung des Zeeman-Effekts betrachten wir jedoch die Auswahlregeln für den Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Aus a), b) und c) folgt damit:

d) $\Delta J = 0, \pm 1$ und $\Delta m_J = 0, \pm 1$.

Übergänge mit $J = 0 \rightarrow J = 0$ sind jedoch verboten.

Polarisationszustände

Aus den Matrixelementen \vec{d}_{fi} lassen sich Aussagen über die Polarisation der betreffenden Strahlung machen. Im Fall $\Delta m_L = 0$ ist der Vektor des Matrixelements parallel zu \vec{e}_3 , was man sich im klassischen Bild als einen in z -Richtung oszillierenden Dipol vorstellen kann. Das bedeutet, es findet in z -Richtung keine Abstrahlung statt. Das Photon ist linear polarisiert (π -Übergang) und kann nur in transversaler Richtung beobachtet werden.

Bei $\Delta m_L = \pm 1$ verschwindet die z -Komponente; nur eine der beiden anderen wird ebenfalls null. Es handelt sich hierbei um zirkular polarisiertes Licht, für dessen Übergänge die Bezeichnungen σ_{\pm} verwendet werden (rechts- bzw. linkszirkular).

1.1.4 Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten (CGK) werden verwendet, um einen Basiswechsel durchzuführen, wobei die neue Basis mit Hilfe der CGK als Linearkombination der Zustände der alten Basis dargestellt wird. Die Quadrate der CGK können auch als Übergangswahrscheinlichkeiten (eng zusammenhängend mit der Intensität der entsprechenden Spektrallinie) interpretiert werden. Hierbei wird eine Basis des Anfangszustandes in eine Basis des Endzustandes transformiert (oder umgekehrt). Im Falle der elektromagnetischen Strahlung kann man sich vorstellen, dass das ausgesandte Photon und der Endzustand

f zum Anfangszustand i koppeln. Da das Photon Spin 1 hat, kann man die Koeffizienten schreiben als $(J^f m_J^f 1 m_p | J^i m_J^i)$. Die Koeffizienten sind tabelliert, z. B. in der im Praktikumsskript abgedruckten, aus dem *Particle Data Booklet* entnommenen Tabelle der folgenden Form:

$J^f \times 1$		J^i	J^i	...
		m_J^i	m_J^i	...
m_J^f	m_p	CGK		
m_J^f	m_p			
\vdots	\vdots			

Tabelle 1: Tabelle der CGK. Es gilt: $m_p = m_J^i - m_J^f$. Über jedem CGK ist noch ein Wurzelzeichen hinzuzufügen.

Für diejenigen Linien, die zwar gemäß des anomalen Zeeman-Effekts aufgespalten, jedoch mangels ausreichenden Auflösungsvermögen nicht getrennt werden können, muss der Schwerpunkt berechnet werden. Dies geschieht, indem man die nicht mehr aufzulösenden Linien nach ihrer Intensität wichtet und dann über alle beteiligten Linien mittelt. Der Schwerpunkt berechnet sich dann gemäß

$$\overline{\Delta E} = \sum_k (CGK)_k^2 \cdot (m_J^i g_J^i - m_J^f g_J^f)_k \cdot \mu_B B. \quad (8)$$

1.2 Beobachtete Übergänge in Cadmium und Helium

In unserem Versuch werden vier optische Übergänge im Cadmium sowie deren Zeeman-Aufspaltung untersucht werden. Zur Kennzeichnung der Niveaus wird die spektroskopische Schreibweise $n^{2S+1}L_J$ verwendet.

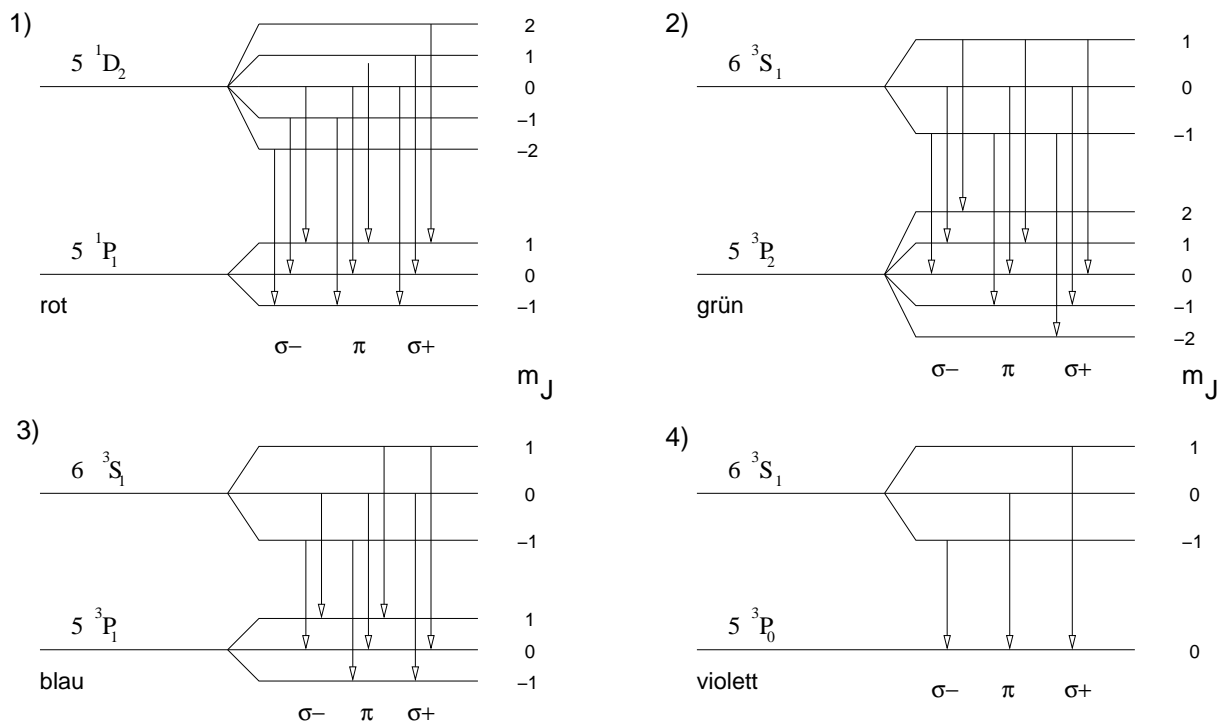


Abbildung 3: Optische Übergänge in Cadmium

1. **rote Cd-Linie** bei $\lambda = 644,027$ nm:

Sowohl im Anfangs- als auch im Endniveau ist $2S + 1 = 1$, also $S = 0$: normaler Zeeman-Effekt, man sieht nur jeweils eine σ_{\pm} - bzw. π -Linie (je drei Übergänge haben die gleiche Energie). Es ist $g_J^i = g_J^f = 1$.

2. **grüne Cd-Linie** bei $\lambda = 508,725$ nm:

Es ist $g_J^i = 2$ und $g_J^f = \frac{3}{2}$ (anomaler Zeeman-Effekt). Da es jeweils drei σ -Linien gibt, muss der Linienschwerpunkt ermittelt werden.

3. **blaue Cd-Linie** bei $\lambda = 480,125$ nm:

Wie oben: $g_J^i = 2$ und $g_J^f = \frac{3}{2}$. Der Linienschwerpunkt wird durch Mittelung über nur je zwei Linien berechnet.

4. **violette Cd-Linie** bei $\lambda = 467,946$ nm:

Im Endniveau tritt wegen $J^f = 0$ keine Aufspaltung auf, für das obere Niveau gilt $g_J^i = 2$.

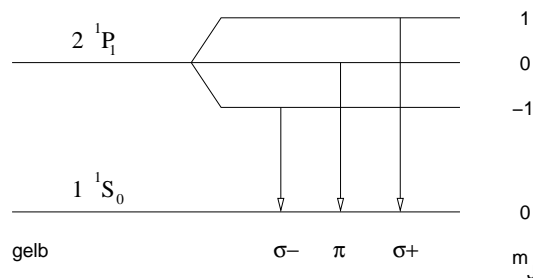


Abbildung 4: Paschen-Back-Aufspaltung der gelben He-Linie

5. **gelbe He-Linie** bei $\lambda = 584,354$ nm:

Auch hier ist der Grundzustand $1\ ^1S_0$ (unteres Niveau) nicht aufgespalten, es treten also nur genau drei Linien auf.

Ermittlung der Linienschwerpunkte für die grüne und blaue Cd-Linie

• **grüne Linie**

Es ist $g_J^i = 2$, $g_J^f = \frac{3}{2}$, $J^i = 1$, $J^f = 2$, gesucht ist der Koeffizient ($2\ m_J^f\ 1m_p\ | 1m_J^i$); gültig ist also die 2×1 -Tabelle.

	m_J^i	m_J^f	$m_J^i g_J^i - m_J^f g_J^f$	(CGK) ²
σ_-	1	2	-1	$\frac{3}{5}$
	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{10}$
	-1	0	-2	$\frac{1}{10}$
σ_+	1	0	2	$\frac{1}{10}$
	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{10}$
	-1	-2	1	$\frac{3}{5}$

Es ist damit $\overline{\Delta E} = \mu_B B \cdot [\frac{3}{5} \cdot (\pm 1) + \frac{3}{10} \cdot (\pm \frac{3}{2}) + \frac{1}{10} \cdot (\pm 2)] = \mu_B B \cdot (\pm \frac{5}{4})$.

• **blaue Linie**

Es ist $g_J^i = 2$, $g_J^f = \frac{3}{2}$, $J^i = 1$, $J^f = 1$, gesucht ist der Koeffizient ($1\ m_J^f\ 1m_p\ | 1m_J^i$); gültig ist also die 1×1 -Tabelle.

	m_J^i	m_J^f	$m_J^i g_J^i - m_J^f g_J^f$	$(CGK)^2$
σ_-	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
	-1	0	-2	$\frac{1}{2}$
σ_+	1	0	2	$\frac{1}{2}$
	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

Es ist damit $\overline{\Delta E} = \mu_B B \cdot [\frac{1}{2} \cdot (\pm 2) + \frac{1}{2} \cdot (\pm \frac{3}{2})] = \mu_B B \cdot (\pm \frac{7}{4})$.

1.3 Optische Instrumente

Da es sich um sehr feine Aufspaltungen der Spektrallinien handelt, benötigt man zur Beobachtung dieser Effekte optische Geräte mit sehr hohem Auflösungsvermögen. Beim Zeeman-Effekt setzen wir dazu eine Lummer-Gehrcke-Platte (LGP) ein, beim Paschen-Back-Effekt ein Fabry-Pérot-Interferometer (FPI).

1.3.1 Lummer-Gehrcke-Platte

Es handelt sich bei der Lummer-Gehrcke-Platte um eine für optische Strahlung durchlässige Glasplatte mit planparallelen Seitenflächen, an deren einem Ende ein Prisma aufgesetzt ist. So werden die einfallenden Strahlen in die horizontal liegende Platte gelenkt (siehe Abb. 5).

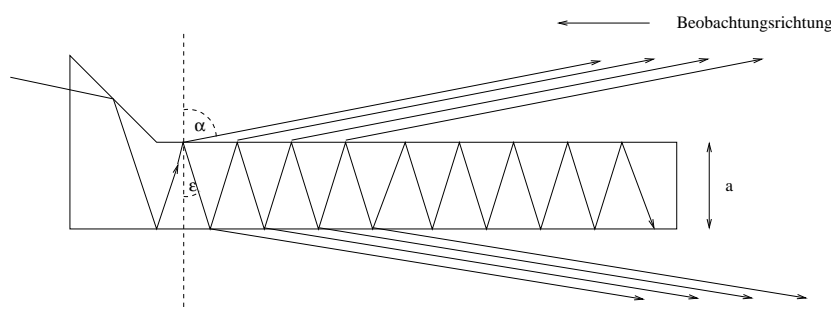


Abbildung 5: Schematische Darstellung der Lummer-Gehrcke-Platte

Während zwischen Plattenoberseite und -unterseite werden die Strahlen mehrfach hin und her reflektiert: das verwendete Prinzip ist das eines Vielstrahlinterferometers. Für die Interferenzbedingung müssen die optischen Weglängendifferenzen benachbarter Strahlen betrachtet werden. Ist n der Brechungsindex des Plattenmaterials, a die Dicke der Platte, ε der Innenwinkel bei Reflexion und z die Ordnung des Maximums, so lautet die Bedingung für die Beobachtung eines Interferenzmaximums:

$$\begin{aligned}
 z \cdot \lambda &= n \cdot 2 a \cos \varepsilon \\
 &= 2 n a \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon} \\
 &= 2 n a \sqrt{1 - (\sin^2 \alpha)/n^2} \\
 &= 2 a \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \\
 &\approx 2 a \sqrt{n^2 - 1} \quad \text{für streifenden Einfall, } \alpha \simeq 90^\circ.
 \end{aligned}$$

Bei den Beinahe-Totalreflexionen dringt nur jeweils ein geringer Teil der Intensität nach außen, so dass bei ausreichender Länge der Platte eine sehr große Zahl von Reflexionen stattfindet und dementsprechend viele Strahlen zur Interferenz kommen.

Für den Winkelabstand $\Delta\alpha$ zweier Maxima aufeinanderfolgender Ordnungen ($\Delta z = 1$) bei konstantem λ erhält man durch Differenzieren der obigen Beziehung:

$$\Delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial z} \Delta z = -\frac{\lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{a \sin(2\alpha)},$$

und dieser Ausdruck wird maximal für $\alpha \simeq 0^\circ$ (verwendet beim FPI) bzw. $\alpha \simeq 90^\circ$ (fast streifender Austritt, LGP).

Wird zusätzlich zur Wellenlänge λ Licht der benachbarten Wellenlänge $\lambda + \delta\lambda$ eingestrahlt, kann es zur Überlagerung eines Maximums der ersten Wellenlänge in der Ordnung z mit einem Maximum der zweiten Wellenlänge in der Ordnung $z + 1$ kommen; die beiden Linien wären dann nicht zu trennen. Damit die Differenz noch auflösbar ist, muss $\delta\lambda$ aus einem maximal zulässigen Intervall $\Delta\lambda$ (*Dispersionsgebiet*) genommen werden. Man findet den Ausdruck

$$\Delta\lambda = \frac{2a^2 \sin(2\alpha)}{4a^2 n \left(\frac{dn}{d\lambda}\right) - z^2 \lambda} \Delta\alpha = \frac{z \lambda^2}{z^2 \lambda - 4a^2 n \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)} = \frac{\lambda^2 \sqrt{n^2 - 1}}{2a (n^2 - 1)} = \frac{\lambda^2}{2a \sqrt{n^2 - 1}}.$$

Beobachtet man zwei Linien, welche den Winkel $\delta\alpha$ einschließen, so beträgt ihre Wellenlängendifferenz

$$\delta\lambda = \frac{\delta\alpha}{\Delta\alpha} \cdot \Delta\lambda.$$

Es ist sinnvoll, das Verhältnis $\frac{\delta\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{1}{4}$ einzustellen. Äquidistanz von Linien lässt sich mit subjektivem Empfinden ziemlich präzise feststellen. Bei Aufspaltung einer Linie in je einen höher- und niederfrequenten Teil ist das gewünschte Verhältnis genau dann erreicht, wenn diese Linien alle gleiche Abstände haben.

Aus $\delta\lambda$ lässt sich mit $\delta\nu = \left| -\frac{c}{\lambda^2} \right| \delta\lambda$ auch der Frequenzunterschied berechnen:

$$\delta\nu = \frac{\delta\alpha}{\Delta\alpha} \cdot \frac{c}{2a \sqrt{n^2 - 1}},$$

was nicht mehr von der Wellenlänge abhängt.

Hat die LGP $n = 1,4567$ und $a = 4,04$ mm, so ergibt sich bei eingestelltem $\frac{1}{4}$ -Verhältnis:

$$\delta\nu = 9,3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}.$$

Theoretisches Auflösungsvermögen

Betrachtet man die rote Cd-Linie bei $\lambda = 644,027$ nm mit einer LGP der Länge $L = 12$ cm, so beträgt das theoretische Auflösungsvermögen

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{L}{\lambda} (n^2 - 1) = 2,09 \cdot 10^5.$$

1.3.2 Fabry-Pérot-Interferometer

Ein FPI ist aus zwei verspiegelten planparallelen Platten im Abstand d aufgebaut. Fast senkrecht auftreffendes Licht wird durch Mehrfachreflexion an den Innenseiten der Glasplatten in ein interferierendes Bündel aufgespalten. (Im Gegensatz zur LGP ist hier eine Verspiegelung zur Erhöhung des Reflexionsgrades erforderlich; bei der LPG wird statt dessen Totalreflexion mit hohem Reflexionsgrad ausgenutzt.)

Da das Licht beinahe senkrecht aus dem FPI austritt, erhält man eine große Dispersion und ein sehr hohes Auflösungsvermögen. Konstruktive Interferenz findet statt bei

$$z \cdot \lambda = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \approx 2nd, \quad \text{denn } \alpha \simeq 0^\circ.$$

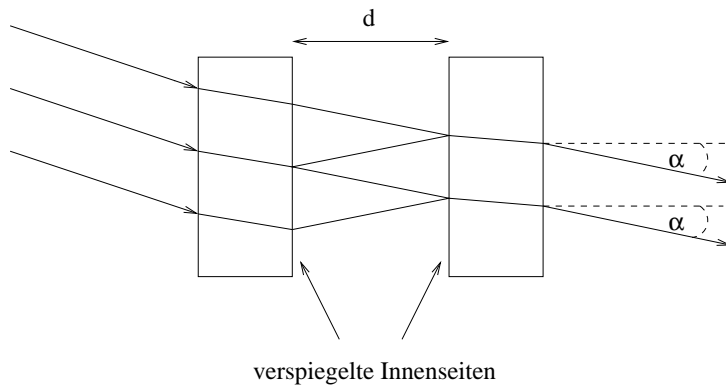


Abbildung 6: Schematische Darstellung des Fabry-Pérot-Interferometers

α beträgt in Wirklichkeit nur ca. 0° . In der Skizze sind die Winkel zur besseren Übersichtlichkeit etwas größer eingezeichnet.

Das Interferenzmuster besteht aus konzentrischen Ringen mit Abständen, welche von λ bzw. ν und d abhängen. Strahlung mit geringfügig höherer Frequenz führt zu etwas weiter auseinanderliegenden Ringen. Für die Frequenzänderung gilt analog zu oben:

$$\delta\nu = \frac{\delta\alpha}{\Delta\alpha} \frac{c}{2nd}$$

Das Dispersionsgebiet berechnet sich zu $\Delta\lambda = \lambda(z) - \lambda(z+1) = \frac{2nd}{z} - \frac{2nd}{z+1}$.

Bezeichnet ρ den Reflexionsgrad der Spiegel des FPI, so gilt für sein Auflösungsvermögen:

$$A = \frac{2\pi n d}{(1 - \rho)\lambda}$$

2 Versuchsaufbau

2.1 Zeemann-Effekt

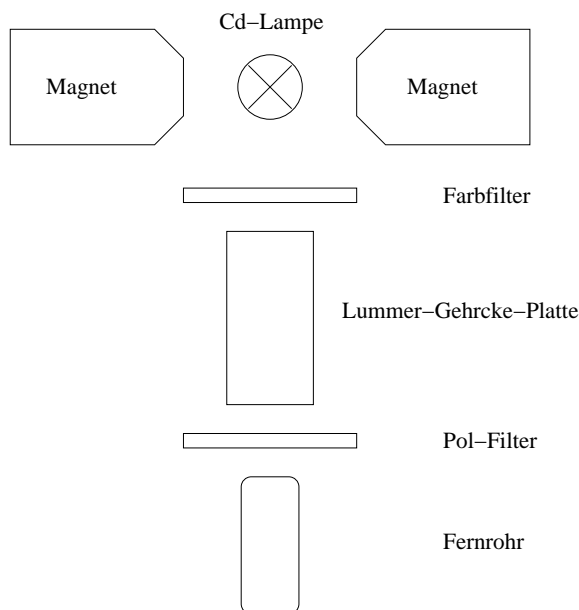


Abbildung 7: Versuchsaufbau zur Untersuchung des Zeeman-Effekts an Cadmium

In Abb. 7 ist der Aufbau des ersten Versuchsteils schematisch dargestellt. Die Cadmium-Lampe wurde in der Mitte zwischen den beiden Polschuhen angebracht, damit sie sich in einem möglichst homogenen Magnetfeld befindet. An einem Netzgerät konnte die Spannung für den Elektromagneten eingestellt werden; mit Hilfe eines Amperemeters wurde die Stromstärke gemessen. Das Licht fiel zunächst auf einen auswechselbaren Farbfilter, dann in das Gehäuse mit der Lummer-Gehrcke-Platte und trat schließlich in das Fernrohr ein, an dessen Objektiv ein Polarisationsfilter befestigt werden konnte. Bei diesem Versuchsteil musste wenig justiert werden; das Fernrohr war schon auf „unendlich“ voreingestellt. Die LGP brauchte ebenfalls nicht gesondert eingestellt zu werden.

Zur Eichung des Magnetfeldes wurde die Lampe vorsichtig aus ihrer Halterung entfernt und an ihrer Stelle die Hallsonde mit Hilfe eines Stativs platziert; möglichst genau an der Stelle, an der auch das beobachtete Licht entstand.

2.2 Paschen-Back-Effekt

Beim zweiten Versuchsteil war die Apparatur etwas umfangreicher (siehe Abb. 8). Aufgrund der größeren Anzahl optischer Elemente erforderte die Justierung hier auch mehr Zeit und Geschick.

Die Justierung wird mit Hilfe einer Cd-Lampe durchgeführt, da diese eine wesentlich höhere Lichtintensität bietet und auch nicht nach zwei Minuten zur Kühlung abgeschaltet zu werden braucht wie die später zur Versuchsdurchführung verwendete He-Lampe. Die Cd-Lampe ist in longitudinaler Beobachtungsrichtung auf der optischen Achse angebracht. Ihr Licht kann durch eine Bohrung in den Polschuhen des Magneten hindurchtreten und am Ausgang des Magneten beobachtet werden. Da diese runden Bohrungen bereits das durchgelassene Lichtbündel eingrenzen, braucht es in longitudinaler Beobachtungsrichtung nicht gesondert kollimiert zu werden; in transversaler Richtung ist jedoch ein Kollimator dafür vorgesehen, dass nur Licht aus einem möglichst homogenen Feldbereich in die Beobachtungsapparatur gelangt.

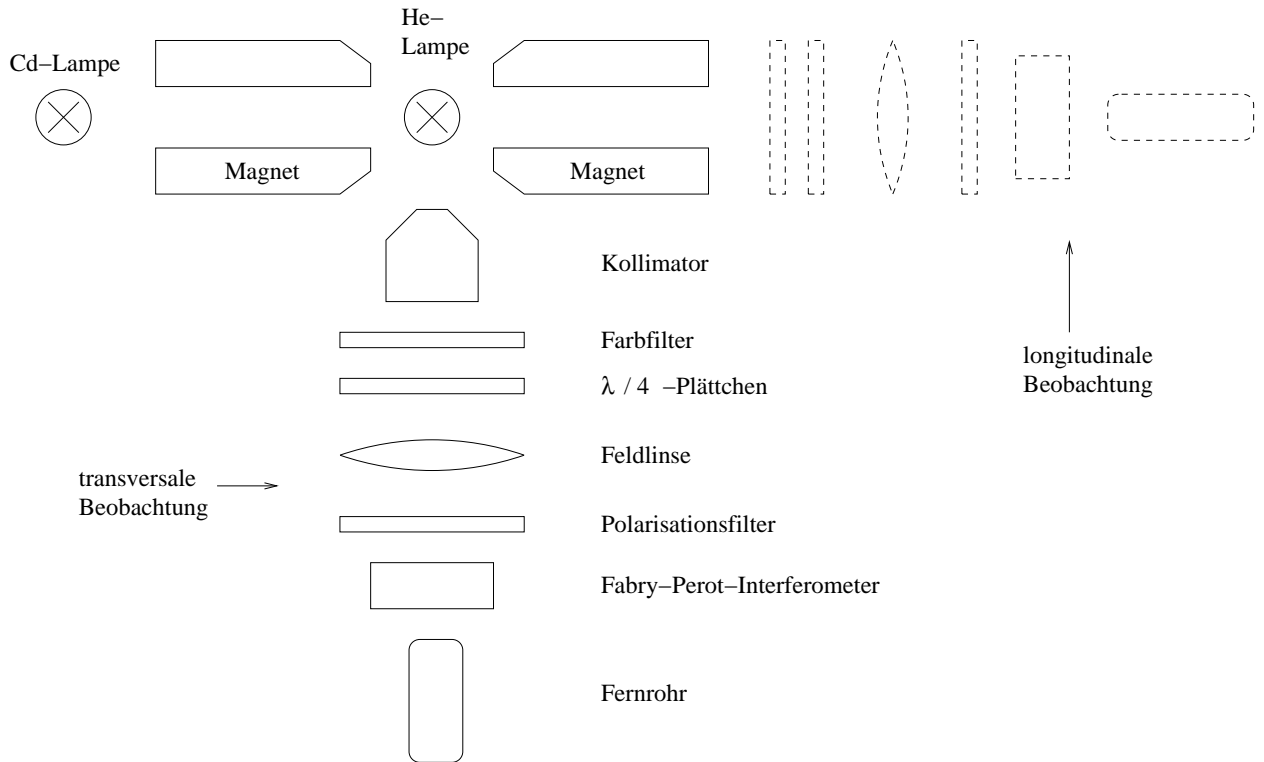


Abbildung 8: Versuchsaufbau zur Untersuchung des Paschen-Back-Effekts an Helium

Auch bei diesem Aufbau ist das Fernrohr bereits vorjustiert. Ebenso soll die Stellung der Schrauben am Fabry-Pérot-Interferometer nicht verändert werden. Es kann jedoch senkrecht zur optischen Achse in der Horizontalen verschoben werden, um es genau im Strahlengang zu platzieren. Die Feldlinse hat die Funktion, die Apertur zu vergrößern; sie dient nicht zur Abbildung des Strahls auf eine bestimmte Stelle im Versuchsaufbau! Eine leicht schräge Stellung der Feldlinse zur optischen Achse hat sich als günstig erwiesen, da so offenbar einige Abbildungsfehler (zumindest teilweise) kompensiert werden und sich ein besseres Bild ergibt.

Im Fernrohr sollte bei eingeschalteter Cd-Lampe ein Muster von konzentrischen Kreisen zu sehen sein. Zur leichteren Beobachtung kann eine bestimmte Farbe mit einem Filter ausgewählt werden (für die Messung mit der He-Lampe steht auch ein Gelbfilter zur Verfügung). Der Aufbau wird bei ausreichender Justierung noch durch den Polarisationsfilter und bei der Bestimmung der Feldrichtung durch das $\lambda/4$ -Plättchen ergänzt.

Zur transversalen Beobachtung kann der gesamte Aufbau mit allen optischen Elementen um 90° auf dem Arbeitstisch gedreht werden.

3 Versuchsdurchführung und Auswertung

3.1 Zeeman-Effekt

3.1.1 Eichung des Magnetfeldes

Die Eichung ist notwendig, um aus den ermittelten Werten derjenigen Stromstärke I / A , bei der jeweils die Aufspaltung in gewünschter Weise zu beobachten war, die entsprechende Magnetfeldstärke zu ermitteln. Diese Werte werden in der weiteren Auswertung benötigt.

Die Eichung haben wir jedoch erst nach den übrigen Messungen durchgeführt, um möglichst viele Messpunkte in den relevanten Wertebereich legen zu können. Die Ergebnisse der Eichung sollen jedoch der Weiteren Beschreibung des Versuchsablaufes vorangestellt werden, da sie dort in die Auswertung eingehen.

Wir haben mit Hilfe der Hallsonde zwei Messreihen aufgenommen: eine für ansteigende und eine für abfallende Stromstärke. Auf diese Weise können wir wenigstens zum Teil die Hysterese des Magneten als Fehlerquelle berücksichtigen, indem wir über beide Messreihen mitteln und dann mit Hilfe der Eichung der Hallsonde aus der Staatsexamensarbeit

$$\frac{B}{T} = 0,00979 \cdot \frac{U_H}{\text{Skt}}$$

die Werte der Magnetfeldstärke bestimmen. Abbildung 9 und Tabelle 6 (im Anhang) geben unsere Messergebnisse wieder.

Die Messdaten werden durch eine Gerade (roter Graph in Abb. 9) nur in bestimmten Bereichen gut angenähert. Daher erschien es uns angebracht, noch einen weiteren Fit durchzuführen, bei dem zusätzlich zum linearen Term noch ein quadratischer Term berücksichtigt wird. Dieser Fit ist in der Eichkurve blau eingezeichnet. Er stellt eine bessere Annäherung an unsere Messdaten dar, besonders im mittleren und oberen Wertebereich, wo der Sättigungseffekt langsam einsetzt. Wir haben also einen Zusammenhang der Form $B = a + b \cdot I + c \cdot I^2$ zwischen Stromstärke und Magnetfeld zur Eichung benutzt. Die Werte der Fit-Parameter liefern dann:

$$\frac{B}{T} = (-0,02183 \pm 0,00913) + (0,08022 \pm 0,00294) \cdot \frac{I}{A} + (-0,00201 \pm 0,00021) \cdot \frac{I^2}{A^2}. \quad (9)$$

Zusätzlich zu den Parametern des Fits ist auch jeweils deren Unbestimmtheit angegeben.

In der Tabelle sind die Fehler nicht einzeln aufgeführt, da sie jeweils für jeden Wert innerhalb einer Spalte gleich sind. Zu nennen sind insbesondere

- $\Delta I = 0,25 \text{ A}$ (Ablesefehler, eventueller Fehler des Messgerätes)
- $\Delta U_{H, \text{ auf/ab}} = 1 \text{ Skt}$ (s. o.)
- $\Delta \bar{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta U_{H, \text{ auf/ab}} = 0,7 \text{ Skt}$
- $\Delta B = 0,00979 \frac{T}{\text{Skt}} \cdot \Delta \bar{U}_H = 0,0069 T$

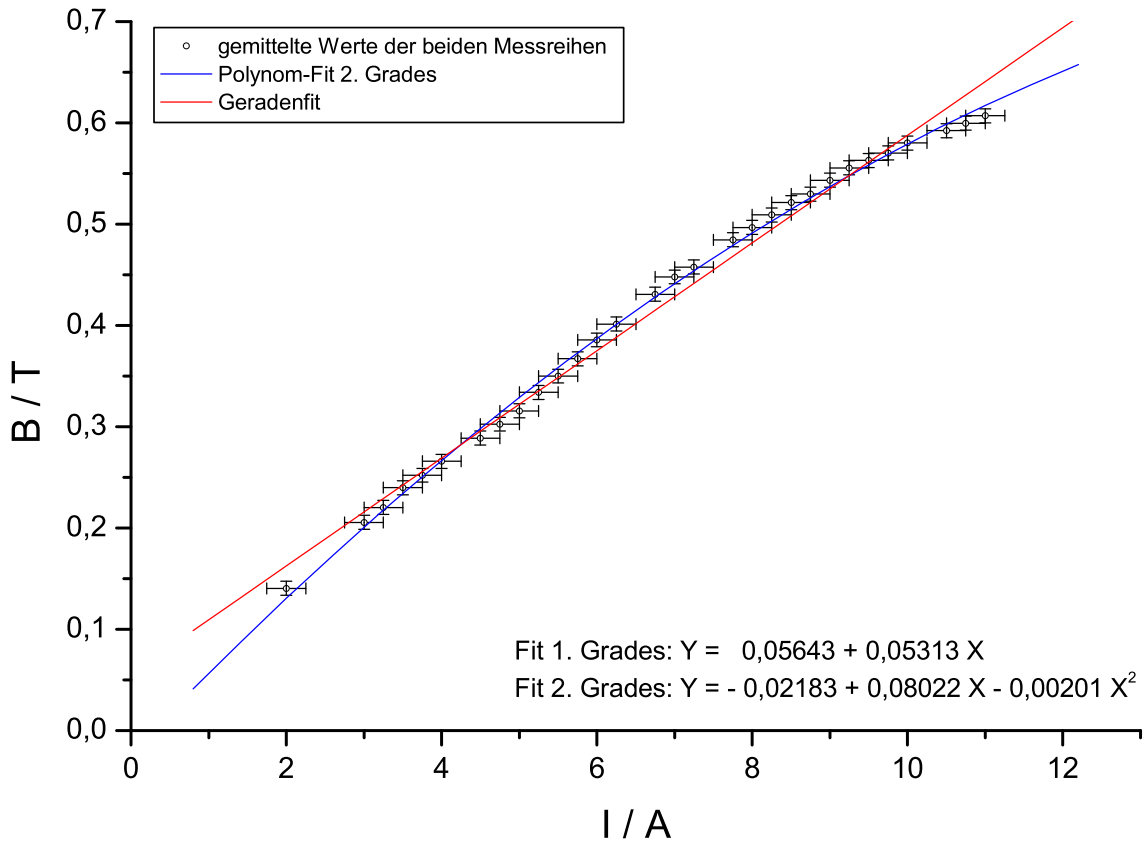


Abbildung 9: Eichung des Magnetfeldes und Fitfunktionen

3.1.2 Untersuchung der Zeeman-Aufspaltung an Cd

In diesem Versuchsteil sollten mit Hilfe unterschiedlicher Farbfilter vier Linien des Cadmium-Spektrums betrachtet und deren Zeeman-Aufspaltung untersucht werden. Dazu haben wir zunächst die unaufgespaltenen Linien und dann bei wachsendem Magnetfeld die zunehmende Aufspaltung betrachtet. Im Fall der roten und violetten Linie traten nur drei Komponenten auf, entsprechend der erwarteten Aufspaltung in σ_- , π und σ_+ . Bei der grünen und blauen Linie konnten wir ebenfalls nur eine dreifache Aufspaltung beobachten, da die Wellenlängenunterschiede innerhalb der einzelnen Liniengruppen nicht mehr aufgelöst werden konnten. Hier muss später zur Bestimmung des Bohrschen Magnetons der Linienschwerpunkt, welchen wir letztendlich nur betrachten konnten, errechnet werden (siehe nächsten Abschnitt).

Ein verstellbarer, am Fernrohr angebrachter Polarisationsfilter diente dazu, die π -Linien auszublenden, so dass wir durch Variation des Magnetfeldes ein Bild mit äquidistanten σ_- - und σ_+ -Linien einstellen konnten (entsprechend dem Verhältnis $\frac{\delta\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{1}{4}$, siehe Abb. 10). Den Wert des Magnetfeldes, bei dem gerade äquidistante Linien zu sehen waren, hat jeder der beiden Versuchspartner mehrfach gemessen, um die subjektive Einstellung und Ablesung zu berücksichtigen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 festgehalten.

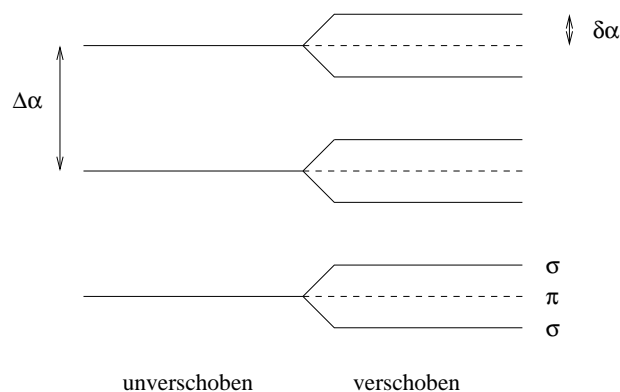


Abbildung 10: Äquidistanz der aufgespaltenen σ -Linien

	rot	grün	blau	violett
I / A	9,5	7,8	5,2	4,7
	9,9	7,6	5,0	4,8
	9,8	7,5	5,0	4,3
	10,5	7,4	5,0	4,2
\bar{I} / A	9,925	7,575	5,05	4,5
B / T	$0,6200 \pm 0,0162$	$0,4705 \pm 0,0158$	$0,3320 \pm 0,0144$	$0,2985 \pm 0,0139$

Tabelle 2: Bestimmung des zur Aufspaltung in äquidistante Linien notwendigen Magnetfeldes

Die Fehler für B wurden hierbei nach dem Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt, wobei zu berücksichtigen ist, dass sich der Fehler $\Delta \bar{I} = \frac{\Delta I}{2}$ aufgrund der Mehrfachmessung der Stromstärke verkleinert.

3.1.3 Bestimmung des Bohrschen Magnetons μ_B

Die Messung der Zeeman-Aufspaltung lässt sich auch zur Ermittlung des Bohrschen Magnetons $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ verwenden. Dazu gehen wir von der Formel für die Energieaufspaltung aus:

$$\Delta E = h \delta\nu = (m_J^i g_J^i - m_J^f g_J^f) \mu_B B.$$

Durch Umformen erhält man daraus

$$\mu_B = \frac{h \cdot \delta\nu}{(m_J^i g_J^i - m_J^f g_J^f) \cdot B}.$$

Nun kann man sich zunutze machen, dass man $\delta\nu = 9,3 \cdot 10^9$ kennt (aufgrund der äquidistant eingestellten Linien, so dass $\frac{\delta\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{1}{4}$ gilt). Die Rechnung ergibt die in Tab. 3 angegebenen Werte. Als gewichteten Mittelwert erhalten wir

$$\mu_B = (10,236 \pm 0,077) \cdot 10^{-24} J T^{-1}.$$

Die relative Abweichung vom Literaturwert $\mu_{B, lit} = 9,274 \cdot 10^{-24} J T^{-1}$, welcher nicht innerhalb der Fehlergrenzen liegt, beträgt somit 10,37 %.

Wir gehen davon aus, dass ein systematischer Fehler zu dieser Abweichung geführt hat. Die größte

Linie	$m_J^i g_J^i - m_J^f g_J^f$	B / T	$\mu_B / 10^{-24} (\text{J T}^{-1})$
rot	1	$0,6200 \pm 0,0162$	$9,939 \pm 0,260$
grün	5/4	$0,4705 \pm 0,0158$	$10,478 \pm 0,341$
blau	7/4	$0,3320 \pm 0,0144$	$10,606 \pm 0,440$
violett	2	$0,2985 \pm 0,0139$	$10,322 \pm 0,464$

Tabelle 3: Bestimmung des Bohrschen Magnetons aus der Zeeman-Aufspaltung

Unsicherheit entsteht sicherlich durch das subjektive Einstellen des 1/4-Verhältnisses. Zum Teil ist aus unseren Messungen auch klar ersichtlich, welche Werte von dem einen Versuchspartner ermittelt wurden, und welche dem jeweils anderen zuzuordnen sind (Paare von größeren und kleineren Werten). Dies lässt jedoch noch nicht den Schluss zu, der eine Partner habe den Wert unterhalb des „wahren“ Wertes abgelesen und der andere oberhalb. Vielmehr kann es ebensogut sein, dass beide in die gleiche Richtung falsch abgelesen haben, so dass keine Korrektur des Ergebnisses stattfand.

Hinzu kommen noch mögliche Fehler der Messgeräte. So viel uns zum Beispiel auf, dass das Amperemeter, an dem letztendlich die Aufspaltung eingestellt wurde, nicht in allen Messbereichen gleich empfindlich war. Es kann auch sein, dass eines der Geräte mit einem offset behaftet war.

Leider war die (inzwischen schon einige Jahre zurückliegende) Eichung der Hallsonde in der Staatsexamensarbeit ohne Fehler angegeben, so dass dieser hier nicht berücksichtigt werden konnte.

3.1.4 Bestimmung des Auflösungsvermögens der Lummer-Gehrcke-Platte

In diesem Versuchsteil haben wir nur die rote Cadmium-Linie ($\lambda = 644 \text{ nm}$) betrachtet, wobei durch den Pol-Filter wieder sichergestellt wurde, dass die π -Linien ausgeblendet werden. Bei langsamer Erhöhung der Magnetfeldstärke war zunächst eine Verbreiterung der Linien zu erkennen. Ziel war die Bestimmung derjenigen Magnetfeldstärke, bei der gerade eine Aufspaltung in zwei Teillinien erkennbar war. Daraus lässt sich aufgrund folgender Überlegungen auf das Auflösungsvermögen der LGP schliessen:

Für die Energiedifferenz zwischen den beiden σ -Linien gilt:

$$\Delta E = h \cdot \Delta \nu = \mu_B B.$$

Das Auflösungsvermögen ist definiert als $A = \frac{\nu}{\Delta \nu}$, daher ist

$$A \pm \Delta A = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{h}{\mu_B B} \pm \left(\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{h}{\mu_B B^2} \cdot \Delta B \right)$$

$$\Rightarrow \Delta A = A \cdot \frac{\Delta B}{B}.$$

Jeder Versuchspartner hat mehrere Male die zur Trennbarkeit der Linien erforderliche Stromstärke eingestellt. Tabelle 4 zeigt die Ergebnisse unserer Messung.

I / A	2,7	2,8	2,6	2,5	2,7	2,8	\bar{I} / A	2,683	B / T	$0,1790 \pm 0,0106$
----------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----------------------	-------	----------------	---------------------

Tabelle 4: Messwerte zur Bestimmung des Auflösungsvermögens der LGP

Als Auflösungsvermögen ergibt sich also aus unseren Messungen

$$A = (1,858 \pm 0,110) \cdot 10^5.$$

Vergleich mit dem theoretischen Auflösungsvermögen

Nach der im Theorieteil angegebenen Formel beträgt das theoretische Auflösungsvermögen der LGP

$$A_{theor} = \frac{L}{\lambda} \cdot (n^2 - 1) = 2,09 \cdot 10^5,$$

bei einer Länge der Platte von $L = 12$ cm und einem Brechungsindex von $n = 1,4567$. Wie man sieht, können wir diesen Wert experimentell nicht ganz bestätigen, wir erhalten einen um 11,1 % niedrigeren Wert. Es liegt immerhin eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung vor, was in Anbetracht der nicht sehr hohen Intensität der roten Linien und des enormen subjektiven Einflusses auf die Entscheidung, ab wann zwei Linien gerade trennbar sind, schon ein recht gutes Ergebnis darstellt.

Wir gehen davon aus, dass zudem die verwendete Lummer-Gehrcke-Platte kein ideales optisches Instrument darstellt. Ihre Oberfläche kann kleinste Unebenheiten aufweisen, die das Auflösungsvermögen herabsetzen. Außerdem ist es möglich, dass das verwendete Fernrohr nicht ganz optimal justiert war, so dass auch hierin noch eine (wenn auch eher gering einzuschätzende) Fehlerquelle liegt.

3.2 Paschen-Back-Effekt

3.2.1 Eichung des Magnetfeldes

Hier sind wir ganz analog zu der Eichung beim Zeeman-Effekt vorgegangen. Aus Abb. 11 geht hervor, dass in diesem Fall der Unterschied zwischen dem linearen Fit und dem Fit zweiten Grades nicht so groß war. Es ergibt sich für B und I der folgende Zusammenhang:

$$\frac{B}{T} = (-0,00581 \pm 0,00883) + (0,33917 \pm 0,01725) \cdot \frac{I}{A} + (-0,02670 \pm 0,00806) \cdot \frac{I^2}{A^2} \quad (10)$$

Folgende Messfehler haben wir berücksichtigt:

- $\Delta I = 0,05 \text{ A}$
- $\Delta U_{H, \text{ auf/ab}} = 1 \text{ Skt}$
- $\Delta \bar{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta U_{H, \text{ auf/ab}} \approx 0,7 \text{ Skt}$
- $\Delta B = 0,00979 \frac{T}{\text{Skt}} \cdot \Delta \bar{U}_H = 0,0069 \text{ T}$

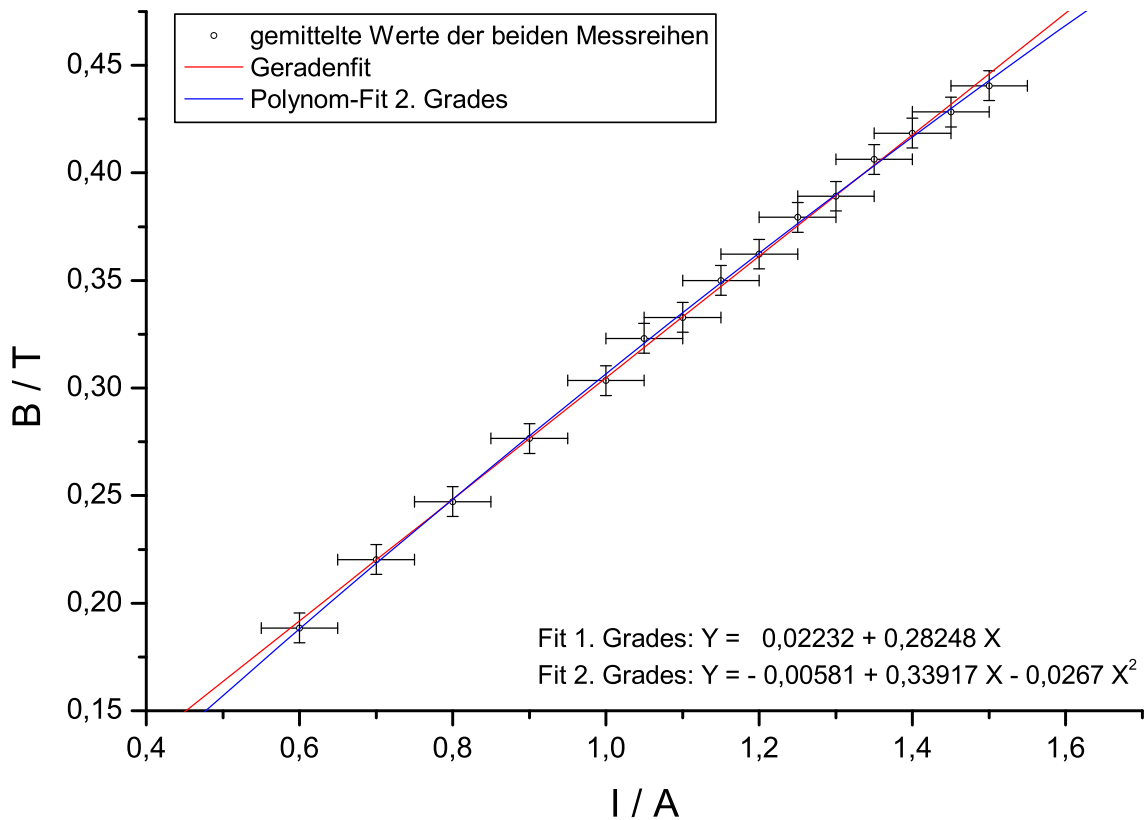


Abbildung 11: Eichung des Magnetfeldes und Fitfunktionen

3.2.2 Paschen-Back-Aufspaltung der gelben He-Linie

Die hier verwendete Helium-Lampe muss nach zweiminütigem Betrieb für mindestens zwei Minuten ausgeschaltet werden, um eine Überhitzung zu vermeiden. Der Ventilator wird dabei nicht abgeschaltet. Zur Beobachtung der Spektrallinien wird hier das Fabry-Perot-Interferometer eingesetzt, so dass man im Fernrohr ein Bild konzentrischer und nach außen hin etwas enger zusammenlaufender Linien sieht.

a) Beobachtung in transversaler Richtung

Ohne Einsetzen eines Polarisationsfilters kann man bei langsam ansteigender Magnetfeldstärke sowohl die beiden σ -Linien als auch die unverschobene π -Linie erkennen. Aus Abb. 12 geht hervor, dass die parallel zur Magnetfeldrichtung polarisierte π -Komponente gerade dann ausgeblendet wird, wenn die Polarisationsachse des Filters senkrecht steht. Auf diese Weise kann man den nicht beschrifteten Filter „eichen“. Dies ist besonders im Hinblick auf den nächsten Versuchsteil sinnvoll.

Auch hier besteht die Messung wieder darin, die Stromstärke des Elektromagneten so einzustellen, dass man ein äquidistantes Ringmuster bei ausgeblendeter π -Linie beobachtet. Jeder der Versuchspartner hat dazu mehrere Einstellungen vorgenommen. Diese Messdaten werden zur Bestimmung von μ_B und $\frac{e}{m}$ benötigt und sind in Abschnitt 3.2.3 tabellarisch aufgeführt.

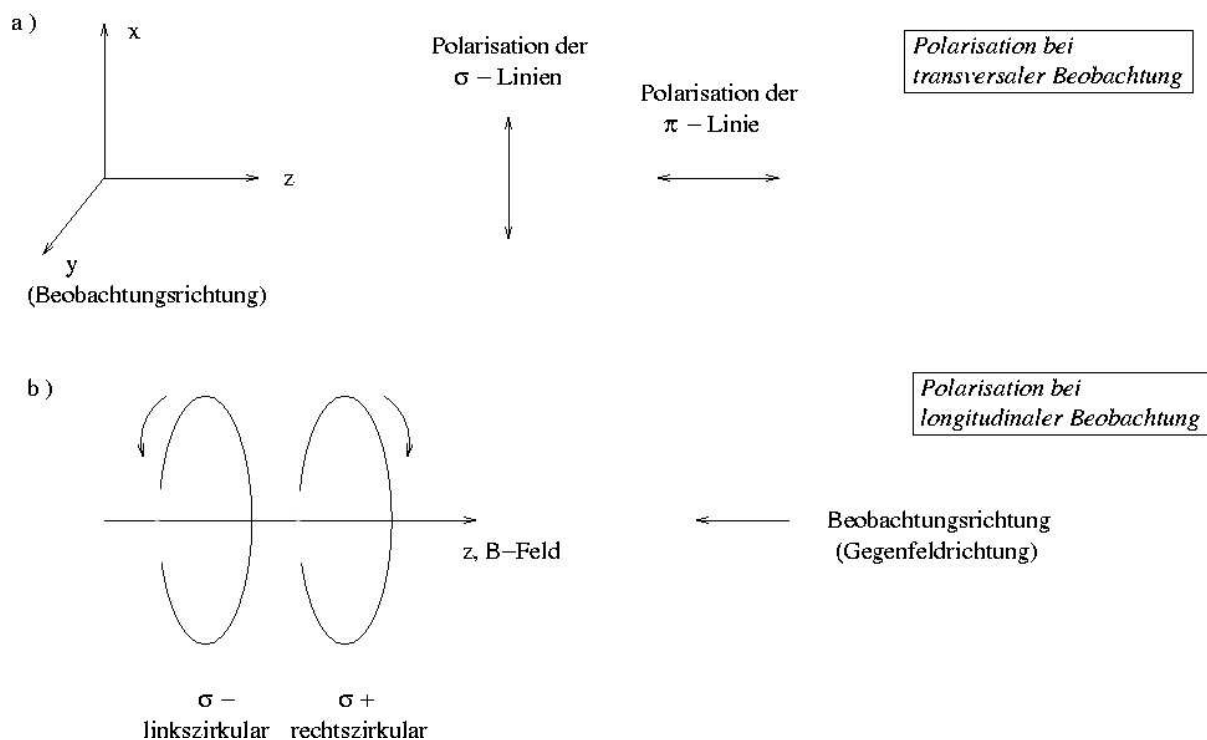


Abbildung 12: Polarisationszustände bei a) transversaler und b) longitudinaler Beobachtung

b) Beobachtung in longitudinaler Richtung

In diesem Teil des Versuchs kommt das $\lambda/4$ -Plättchen zum Einsatz. Es dient dazu, ursprünglich zirkular polarisiertes Licht in linear polarisiertes umzuwandeln. Bei rechtszirkular polarisierter Strahlung ist die horizontale Komponente des Feldvektors gegenüber der vertikalen Komponente um $\frac{\pi}{2}$ verzögert, bei linkszirkularen Wellen verhält es sich umgekehrt. Tritt also eine rechtszirkulare Welle so in ein $\lambda/4$ -Plättchen ein, dass die horizontale Komponente der Strahlung entlang der schnellen Achse einfällt, so

wird der Phasenunterschied gerade aufgehoben, und man beobachtet eine linear polarisierte Welle mit einem Polarisationswinkel von 45° . Im Fall von linkszirkular polarisiertem Licht erhält man jedoch am Austritt des Plättchens eine Phasenverschiebung von 180° der beiden Wellenkomponenten gegeneinander, was zu linear polarisierter Strahlung mit Polarisationswinkel -45° führt.

Wir wissen, dass bei longitudinaler Beobachtung nur die beiden zirkular polarisierten σ -Linien zu sehen sind, denn die parallel zum Feld polarisierte π -Komponente verhält sich wie ein Dipol, welcher in der Richtung seiner Achse keine Abstrahlung zeigt. Die Aufgabe besteht also darin, den Polarisationsfilter *hinter* dem $\lambda/4$ -Plättchen aufzubauen und seine Achse auf $+45^\circ$ und -45° einzustellen, so dass jeweils nur die rechtszirkulare oder die linkszirkulare Komponente durchgelassen wird. Das Ziel ist eine Zuordnung der Polarisationsrichtung zu den σ_+ - und σ_- -Linien, um daraus auf die Orientierung des Magnetfeldes relativ zur Beobachtungsrichtung schließen zu können. Wichtig sind dabei folgende zwei Festlegungen:

1. Die rotverschobene Komponente ist bei Beobachtung gegen die Feldrichtung rechtszirkular polarisiert.
2. In unserem Fall ist die rotverschobene die σ_+ -Linie (Konvention!).

Wir haben folgenden Zusammenhang gefunden:

- Polarisationsfilter auf $+45^\circ$: Verschwinden der σ_- -Linie, die somit in -45° -Richtung linear bzw. vor dem Durchgang durch das $\lambda/4$ -Plättchen linkszirkular polarisiert gewesen sein muss.
- Polarisationsfilter auf -45° : Verschwinden der σ_+ -Linie, die somit in $+45^\circ$ -Richtung linear bzw. vor dem Durchgang durch das $\lambda/4$ -Plättchen rechtszirkular polarisiert gewesen sein muss.

Beide Beobachtungen implizieren, dass wir in Gegenfeldrichtung beobachtet haben.

Zur Beobachtung in longitudinaler Richtung gehörte ebenfalls wieder eine Messung mittels der Äquidistanz-Einstellung. Wie auch bei der transversalen Beobachtung, sind die Ergebnisse hierzu im nächsten Abschnitt zur weiteren Auswertung aufgelistet.

3.2.3 Bestimmung des Bohrschen Magnetons μ_B und des Quotienten $\frac{e}{m}$

Die Auswertungsmethode ist ganz analog zu der beim Zeeman-Effekt (Abschn. 3.1.3) verwendeten. Für das Dispersionsgebiet gilt allerdings beim Fabry-Pérot-Interferometer näherungsweise die Formel

$$\Delta\nu = \frac{c}{2 n d},$$

mit dem Brechungsindex $n = 1$ für den Luftspalt zwischen den Interferometerplatten und dem Plattenabstand $d = (8,000 \pm 0,005)$ mm. Nach Einstellen des Verhältnisses $\frac{\delta\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{1}{4}$ erhält man also für die aufgespaltenen Linien eine Frequenzdifferenz von

$$\delta\nu = \frac{\delta\alpha}{\Delta\alpha} \Delta\nu = \frac{1}{4} \frac{c}{2 d} = (4,688 \cdot 10^9 \pm 2,930 \cdot 10^6) \text{ Hz.}$$

Tabelle 5 fasst unsere Messwerte zusammen.

Beobachtung	$I / \text{\AA}$	$I / \text{\AA}$	$\bar{I} / \text{\AA}$	B / T
transversal	1,14	1,16	1,15	$0,3489 \pm 0,0099$
	1,15	1,15		
	1,12	1,16		
	1,15	1,17		
longitudinal	1,18	1,20	1,18	$0,3572 \pm 0,0102$
	1,25	1,16		
	1,17	1,16		
	1,18	1,15		

Tabelle 5: Äquidistanz-Einstellung beim Paschen-Back-Effekt an Helium

Bei Paschen-Back-Aufspaltung wird die Energiedifferenz beschrieben durch

$$\Delta E = h \cdot \delta\nu = [(m_L^i + 2 m_S^i) - (m_L^f + 2 m_S^f)] \cdot \mu_B B.$$

Bei der gelben He-Linie gilt aber $\Delta m_S = 0$ und Δm_L , so dass sich schreiben lässt:

$$\mu_B = \frac{h \cdot \delta\nu}{\Delta m_L \cdot B} = \frac{h \cdot \delta\nu}{B}.$$

Für den Fehler gilt nach Gauß: $\Delta\mu_B = \mu_B \cdot \sqrt{(\frac{\Delta B}{B})^2 + (\frac{\Delta(\delta\nu)}{\delta\nu})^2}$.
Wir finden also

$$\begin{aligned} \mu_{B, \text{trans}} &= (8,902 \pm 0,253) \cdot 10^{-24} \text{ J / T} \\ \mu_{B, \text{long}} &= (8,695 \pm 0,248) \cdot 10^{-24} \text{ J / T} \end{aligned}$$

Der gewichtete Mittelwert beträgt schließlich

$$\mu_B = (8,796 \pm 0,177) \cdot 10^{-24} \text{ J / T},$$

der Literaturwert von $\mu_{B, \text{lit}} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$ liegt also wieder außerhalb der Fehlergrenzen; die relative Abweichung beträgt hier jedoch nur 5,17 %. Im Gegensatz zur Auswertung beim Zeeman-Effekt finden wir hier einen Wert, der kleiner ist als der Literaturwert.

Auch bei dieser Messung sind sicherlich wieder systematische Fehler die Hauptursache für die Abweichung. Beim Fabry-Pérot-Interferometer macht man außerdem noch die Annahme, dass das Licht unter einem Winkel von 0° austritt. Dies ist jedoch nur näherungsweise der Fall. Zusätzliche Fehlerquellen stellen auch die Messgeräte dar, über deren Genauigkeit wir wenig Information haben. Die Fehler für die gemessenen Stromstärkewerte sind nur durch die Albesegenauigkeit und subjektive Einstellung beeinflusst, jedoch beinhalten sie nicht die Eigenschaften des Messgerätes selbst.

Um die spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ zu bestimmen, kann man die Relation $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ benutzen:

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \mu_B}{\hbar} = \frac{4\pi \delta\nu}{B}.$$

Der Fehler berechnet sich nach Gauß zu $\Delta\frac{e}{m} = \frac{e}{m} \cdot \sqrt{(\frac{\Delta(\delta\nu)}{\delta\nu})^2 + (\frac{\Delta B}{B})^2}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left(\frac{e}{m}\right)_{\text{trans}} &= (1,688 \pm 0,028) \cdot 10^{11} \text{ C / kg} \\ \left(\frac{e}{m}\right)_{\text{long}} &= (1,649 \pm 0,029) \cdot 10^{11} \text{ C / kg} \end{aligned}$$

Das Mittel dieser beiden Werte ist $\frac{e}{m} = (1,669 \pm 0,020) \cdot 10^{11} \text{ C / kg}$.

Auch dieser Wert liegt im Vergleich zum Literaturwert $\frac{e}{m} = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ C / kg}$ um 5,17 % zu niedrig. (Wegen der direkten Proportionalität zu μ_B erhalten wir die gleiche relative Abweichung. Die Fehlerdiskussion ist daher mit der für die Bestimmung des Bohrschen Magnetons identisch.)

4 Anhang

I / A	$U_{H, \text{ auf}} / \text{Skt}$	$U_{H, \text{ ab}} / \text{Skt}$	\bar{U}_H / Skt	B / T
2	16,2	12,5	14,35	0,14049
3	22	20	21	0,20559
3,25	24	21	22,5	0,22028
3,5	26	23	24,5	0,23986
3,75	27	24,5	25,75	0,25209
4	28,3	26	27,15	0,2658
4,5	30	29	29,5	0,2888
4,75	31,8	30	30,9	0,30251
5	32,5	32	32,25	0,31573
5,25	34,2	34	34,1	0,33384
5,5	36	35,5	35,75	0,34999
5,75	38	37	37,5	0,36712
6	39,8	39	39,4	0,38573
6,25	41	41	41	0,40139
6,75	44	44	44	0,43076
7	46	45,5	45,75	0,44789
7,25	47	46,5	46,75	0,45768
7,75	50	49	49,56	0,48461
8	51	50,5	50,75	0,49684
8,25	52	52	52	0,50908
8,5	53,5	53	53,25	0,52132
8,75	54,2	54	54,1	0,52964
9	56	55	55,5	0,54334
9,25	57	56,5	56,75	0,55558
9,5	58	57	57,5	0,56293
9,75	58,5	58	58,25	0,57027
10	59,5	59	59,25	0,58006
10,5	60,5	60,5	60,5	0,5923
10,75	61,5	61	61,25	0,59964
11	62	62	62	0,60698

Tabelle 6: Messung zur Eichung des Magnetfeldes beim Zeeman-Effekt

I / A	$U_{H, \text{ auf}} / \text{Skt}$	$U_{H, \text{ ab}} / \text{Skt}$	\bar{U}_H / Skt	B / T
0,6	18,5	20	19,25	0,18846
0,7	22	23	22,5	0,22028
0,8	24,5	26	25,25	0,2472
0,9	27,5	29	28,25	0,27657
1	30	32	31	0,30349
1,05	32	34	33	0,32307
1,1	33	35	34	0,33286
1,15	35	36,5	35,75	0,34999
1,2	36	38	37	0,36223
1,25	38	39,5	38,75	0,37936
1,3	39	40,5	39,75	0,38915
1,35	41	42	41,5	0,40629
1,4	42,5	43	42,75	0,41852
1,45	43,5	44	43,75	0,42831
1,5	45	45	45	0,4405

Tabelle 7: Messung zur Eichung des Magnetfeldes beim Paschen-Back-Effekt

Abbildungsverzeichnis

1	Drehimpulsvektoren und magnetische Momente beim Zeeman-Effekt	4
2	Vektormodell beim Paschen-Back-Effekt	5
3	Optische Übergänge in Cadmium	7
4	Paschen-Back-Aufspaltung der gelben He-Linie	8
5	Schematische Darstellung der Lummer-Gehrcke-Platte	9
6	Schematische Darstellung des Fabry-Pérot-Interferometers	11
7	Versuchsaufbau zur Untersuchung des Zeeman-Effekts an Cadmium	12
8	Versuchsaufbau zur Untersuchung des Paschen-Back-Effekts an Helium	13
9	Eichung des Magnetfeldes und Fitfunktionen	15
10	Äquidistanz der aufgespaltenen σ -Linien	16
11	Eichung des Magnetfeldes und Fitfunktionen	19
12	Polarisationszustände bei a) transversaler und b) longitudinaler Beobachtung	20

Tabellenverzeichnis

1	Tabelle der CGK. Es gilt: $m_p = m_J^i - m_J^f$. Über jedem CGK ist noch ein Wurzelzeichen hinzuzufügen.	7
2	Bestimmung des zur Aufspaltung in äquidistante Linien notwendigen Magnetfeldes	16
3	Bestimmung des Bohrschen Magnetons aus der Zeeman-Aufspaltung	17
4	Messwerte zur Bestimmung des Auflösungsvermögens der LGP	17
5	Äquidistanz-Einstellung beim Paschen-Back-Effekt an Helium	22
6	Messung zur Eichung des Magnetfeldes beim Zeeman-Effekt	24
7	Messung zur Eichung des Magnetfeldes beim Paschen-Back-Effekt	25